Le développement des compétences mathématiques de l'enfant

Laurence ARNAUD

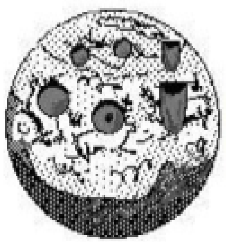
Psychologue spécialisée en neuropsychologie
Docteur en psychologie
Chargée de cours à Aix-Marseille Université

Le concept de nombre

- un peu d'histoire
- est-ce une capacité propre à l'homme ?

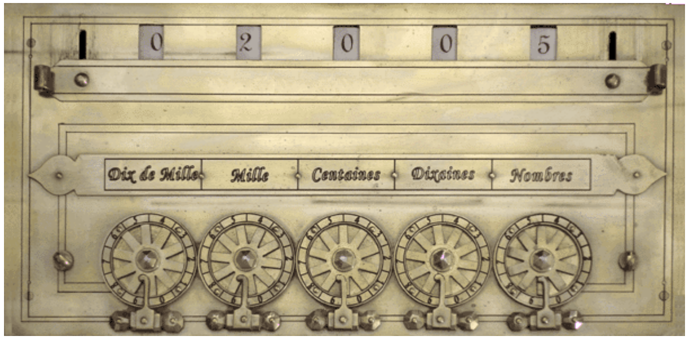
L'évolution d'un concept : le nombre

- le nombre, du concret au concept



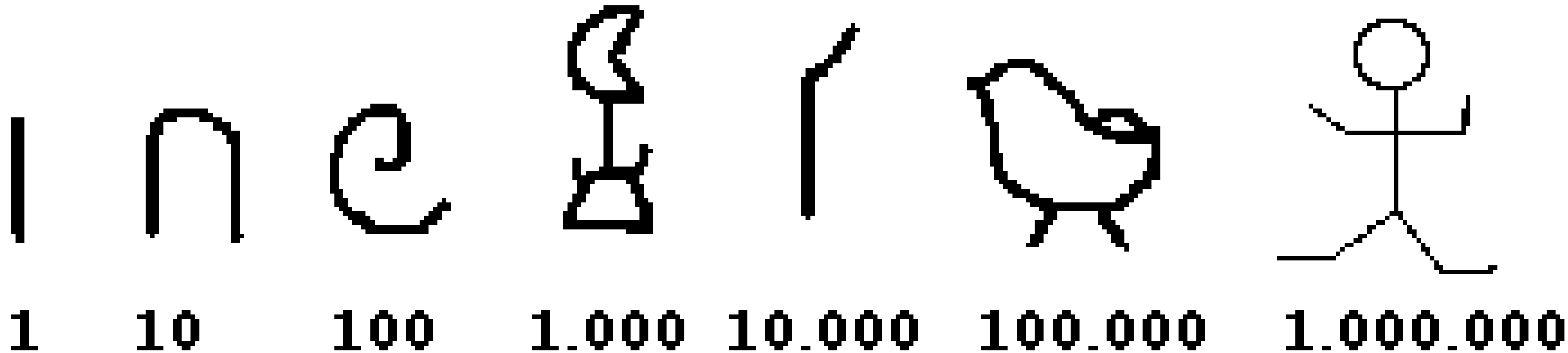
Les six marques sur la bulle de Kalesh

Vers l'abstraction,
des créations successives :
- 0 en 458
- + et – en 1489
- = en 1557
- x en 1631



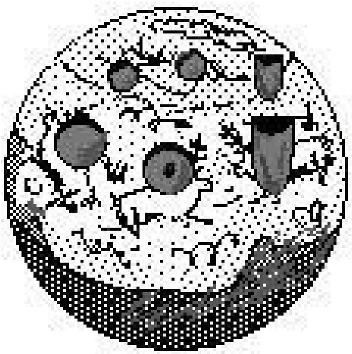
Pascaline

- Vers 3000 av. JC, les Égyptiens écrivent des nombres à l’aide de hiéroglyphes



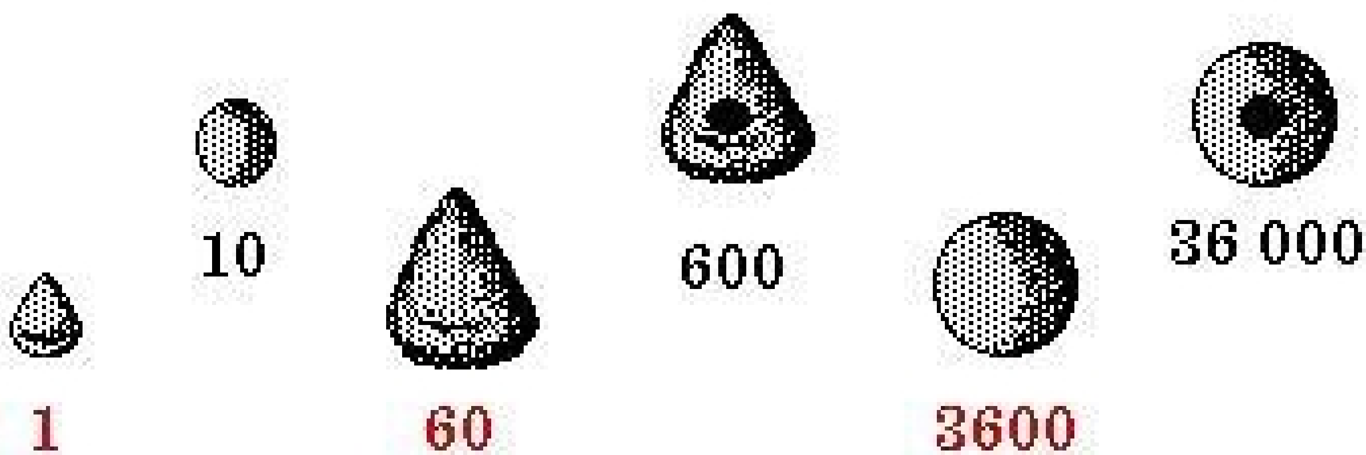
L’exemple du nombre 53 :

les calculi dans la civilisation mésopotamienne



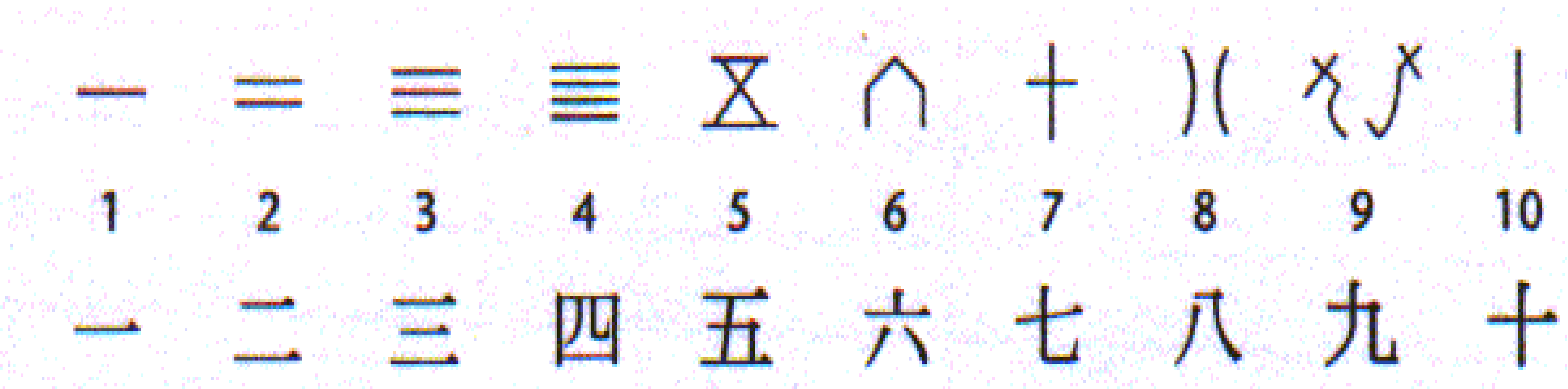
Les six marques sur la bulle de Kalesh

Les calculi sumériens servant à leur numération concrète



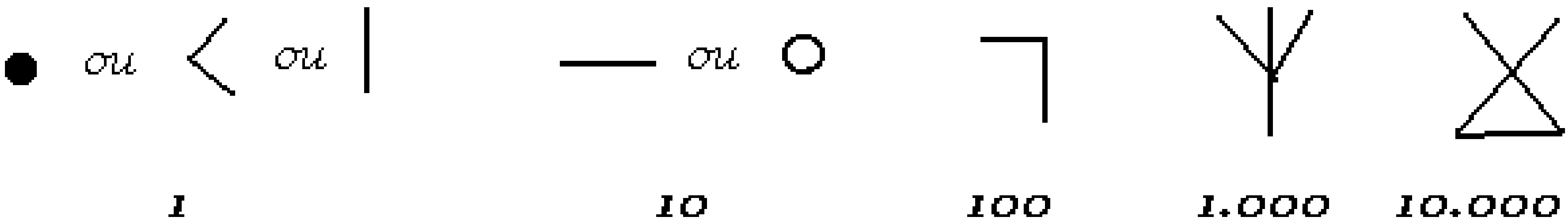
On voit la base soixante (en rouge) et le rôle intermédiaire de la base dix. La perforation veut dire « 10 fois ». La régularité est : x 10, x 6, x 10, x 6...

Vers 1300 av. JC, les premiers chiffres chinois

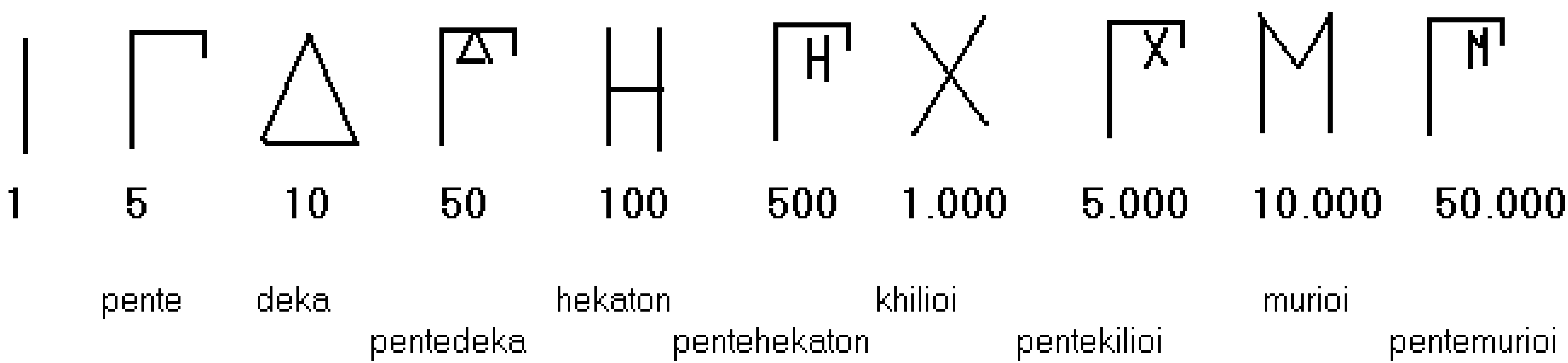


Dessus: les chiffres des jiaguwen (inscriptions sur os et écailles de tortue)
Dessous : les chiffres actuels .

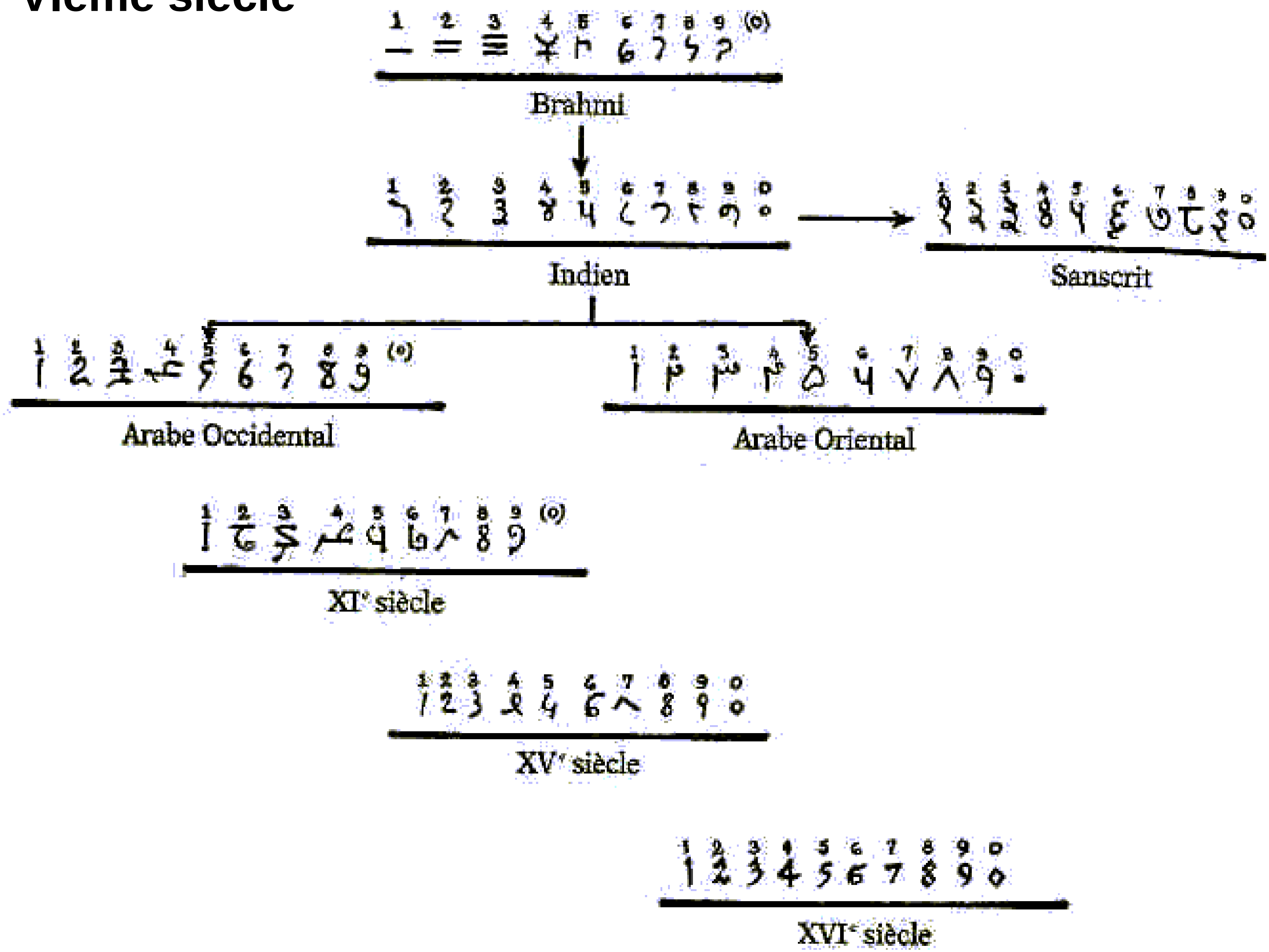
Les premiers symboles grecs (entre -800 et-700 av. JC



Vers -600 av. JC : le système attique

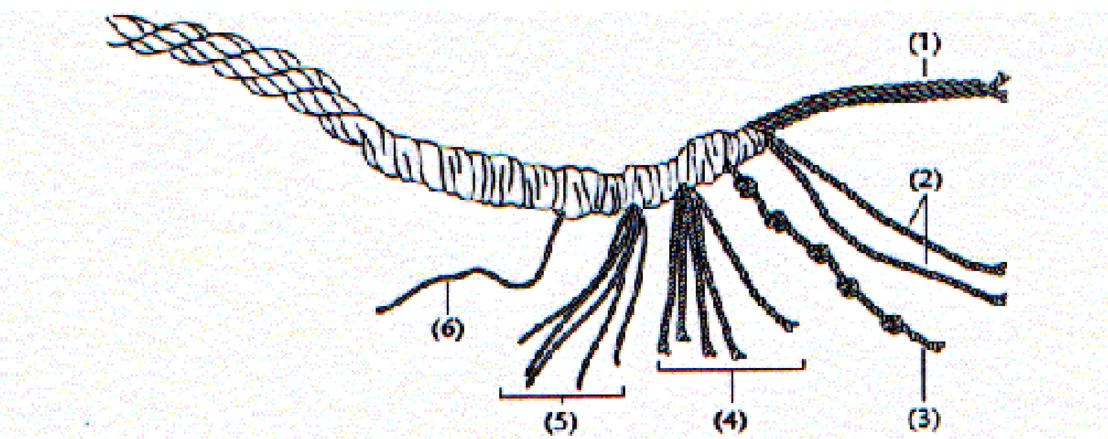


Entre le IV et le VIème siècle

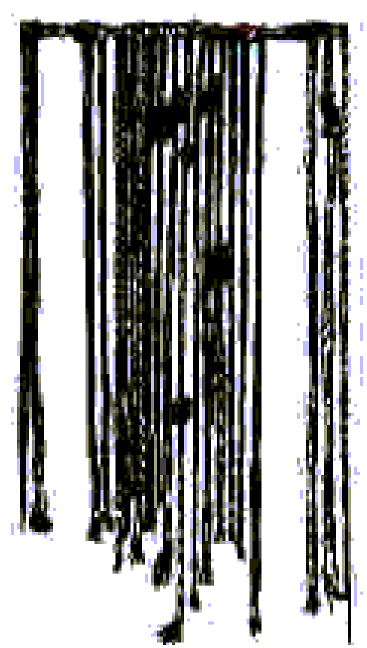


L'évolution des méthodes de calcul : le dénombrement

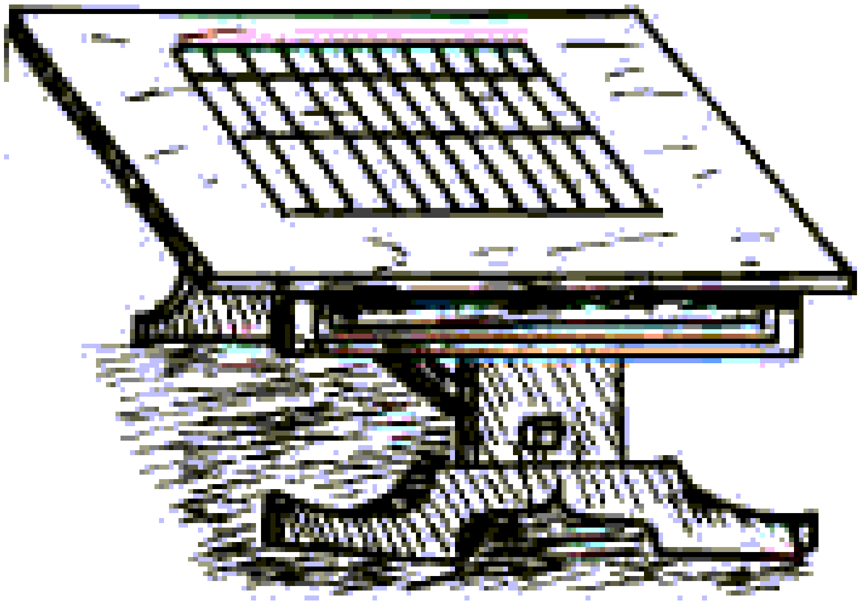
- Doigts
- Entailles
- Tas de cailloux
- Quipus (ou autres cordes à nœuds)

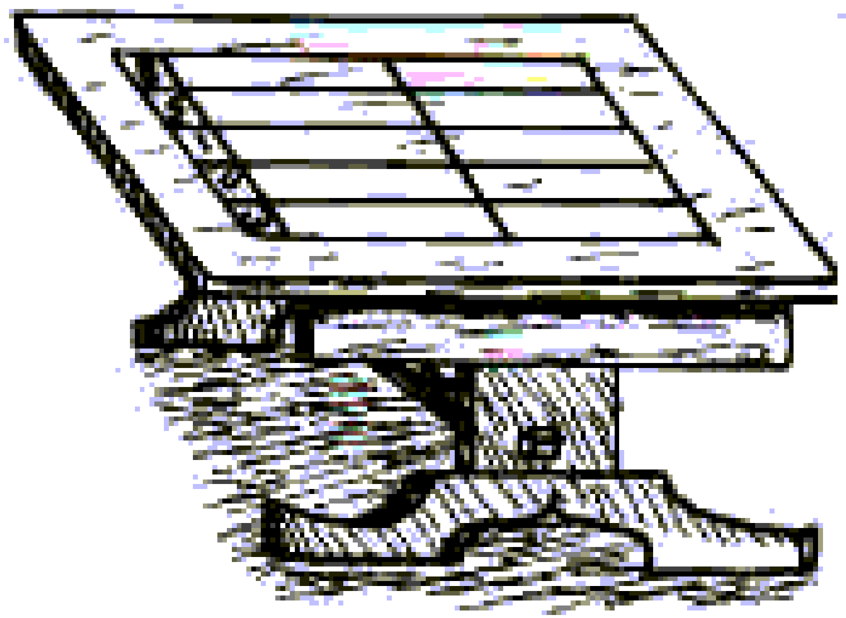


Cordelettes nouées d'Okinawa. Les nombres sont représentés par divers types de nœuds. Sur le schéma, on lit le nombre 12555,5. À partir de la droite : (1) une grosse corde représente la dizaine de milliers ; (2) deux petites cordes représentent les 2 milliers ; (3) une corde comporte 5 nœuds, représentant chacun une centaine ; (4) 5 cordes plus courtes représentent chacune une dizaine ; (5) 5 fibres simples représentent chacune une unité ; (6) une corde représente la fraction 1/2. (D'après Tashiro Yasusada, *Étude des cordelettes nouées d'Okinawa*).

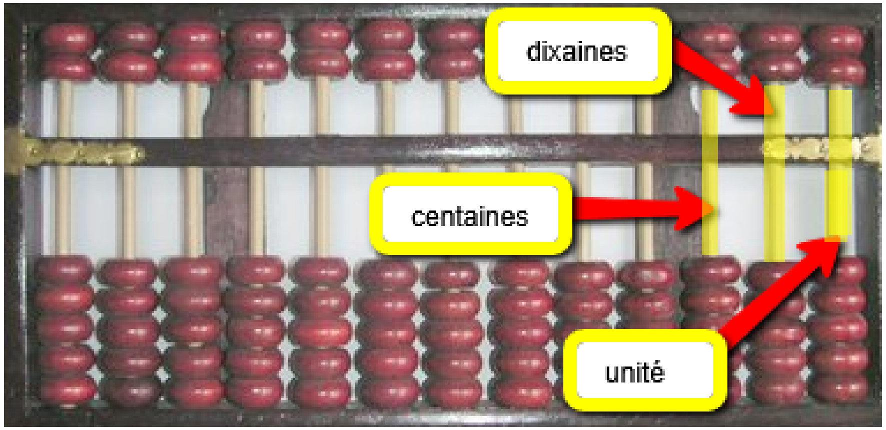


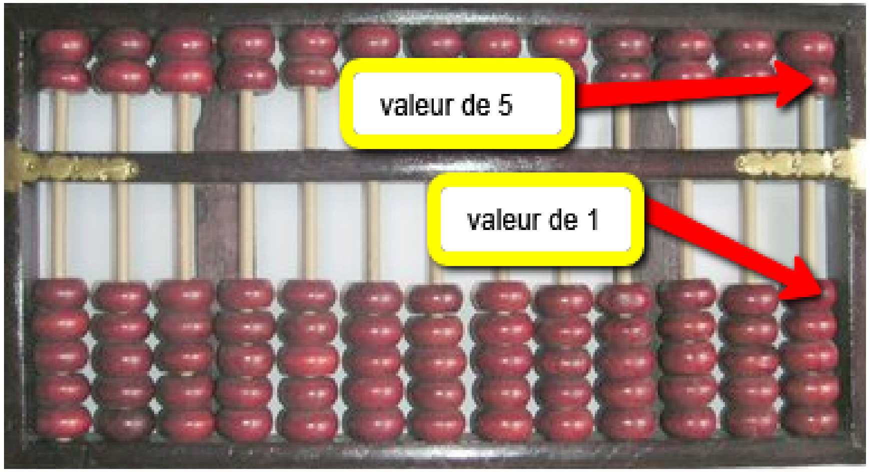
Les abaques



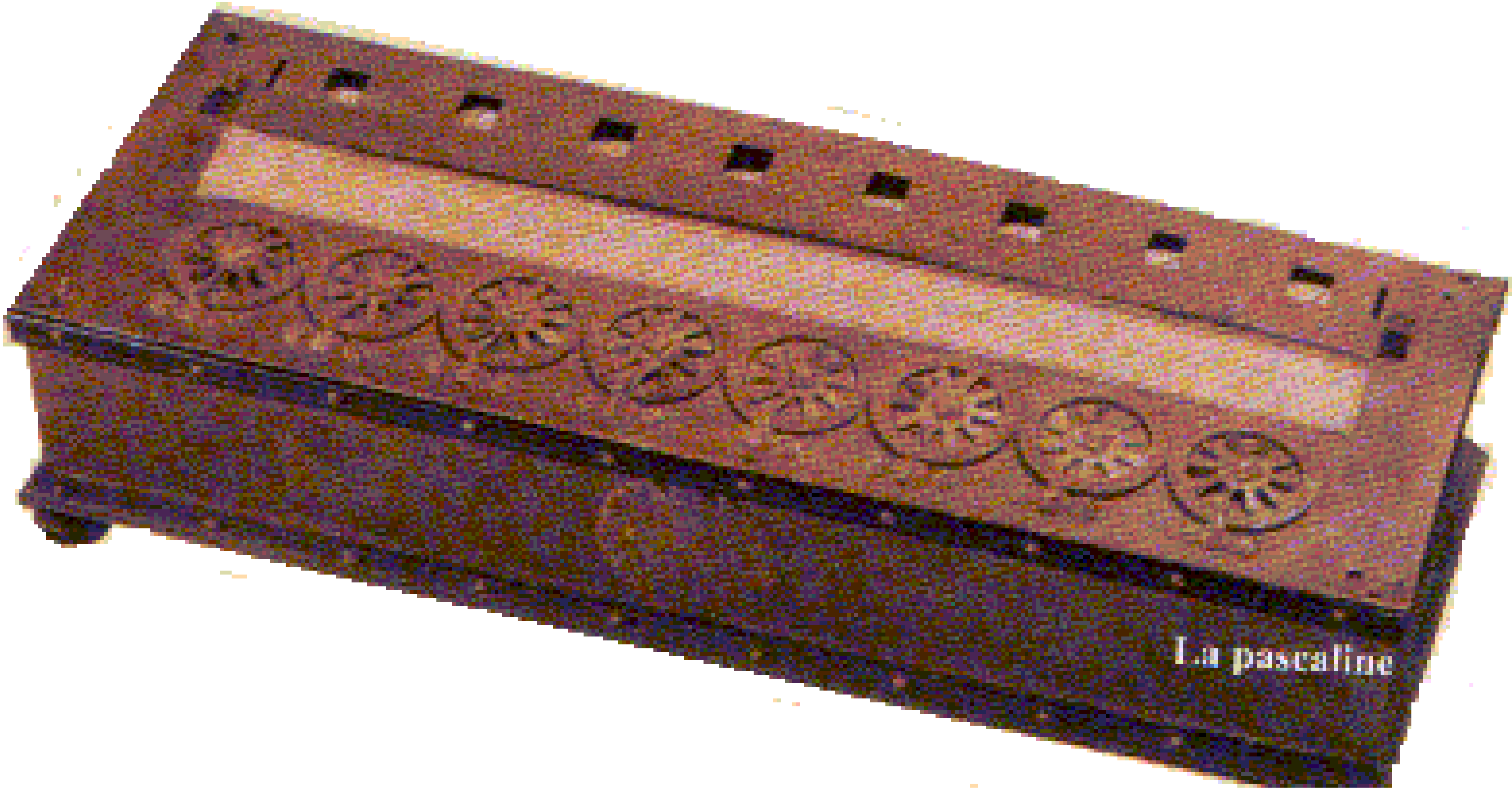


Les bouliers





Machine à calculer



Le plus ancien système consistait à compter sur les doigts. Mais comment enregistrer le résultat ?

Puis on a compté et enregistré de grands nombres en glissant des jetons dans un sac.

On a alors compris que de simples marques gravées sur une tablette suffisaient.

Les Babyloniens ont utilisé des marques de formes différentes pour désigner de grands

Divers symboles placés en différentes positions suffisent à représenter les plus grands nombres.

QUANTIFICATION → **ABSTRACTION**

POUR ALLER PLUS LOIN

http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/pages/hist_mat/textes/h_nombre.htm

http://lechiffre.free.fr/

IFRAH, G. (1994). Histoire universelle des chiffres, Paris : Robert Laffont.

En pratique aujourd'hui

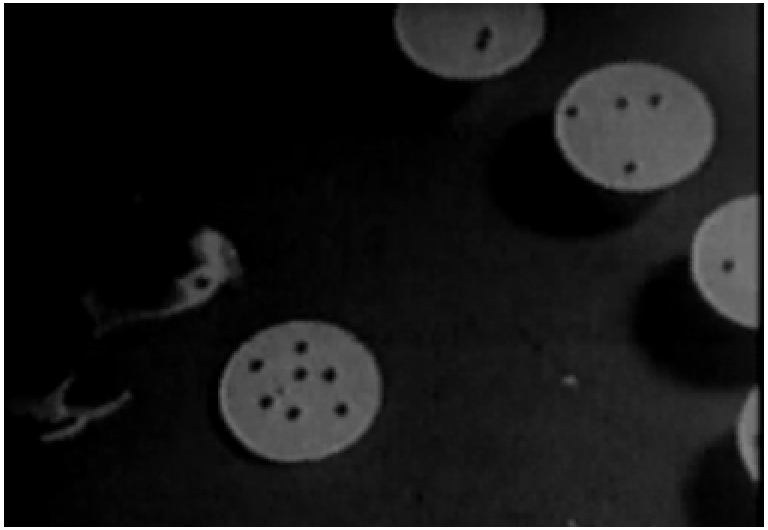
L'exemple du matériel Montessori

À la maison ou en cabinet

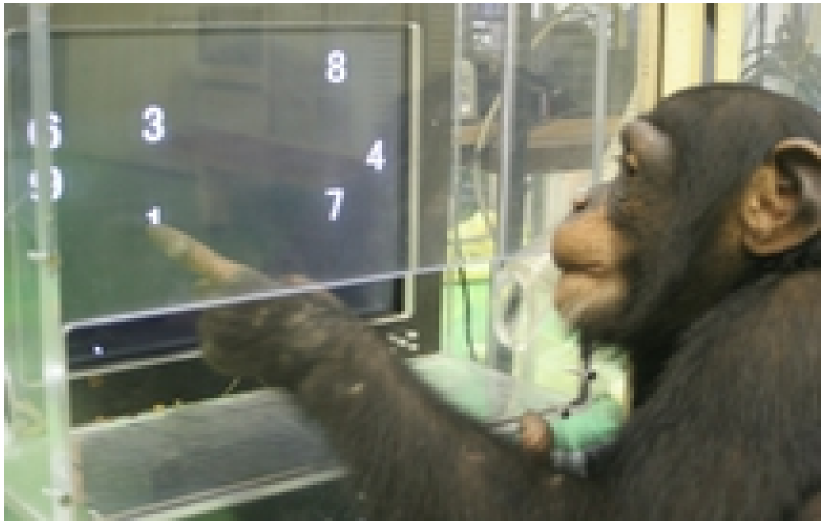
Une capacité propre à l'homme ?

Aspect phylogénétique

- Des capacités chez l'animal



Otto Kohler
(1955)



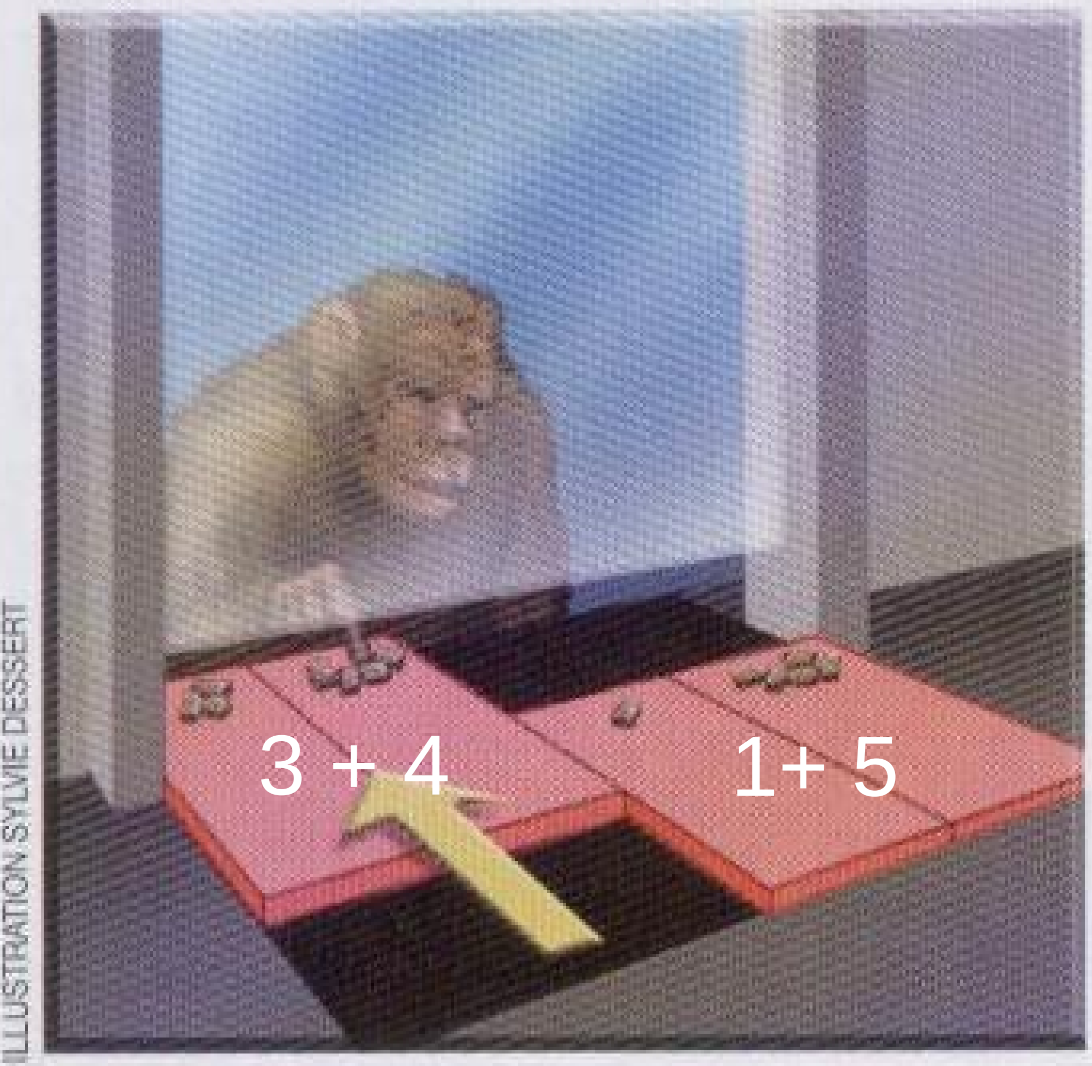
Chimpanzé «Ai» de Tetsuro Matsuzawa
(http://langint.pri.kyoto-u.ac.jp/ai/)

Est capable :

- D’estimation plus ou moins précise
- D’apprentissage numérique

Calcul ?

Rumbaugh et al. (1987)



Etude du proto-comptage chez le chimpanzé
(d'après Rumbaugh et al., 1987).

90% des cas, l'animal choisit le plateau qui contient le plus grand nombre de morceaux.

comparaison perceptive ?

NON !

L'animal est obligé de faire :

une estimation perceptive additive des quantités
+
une comparaison des deux sommations

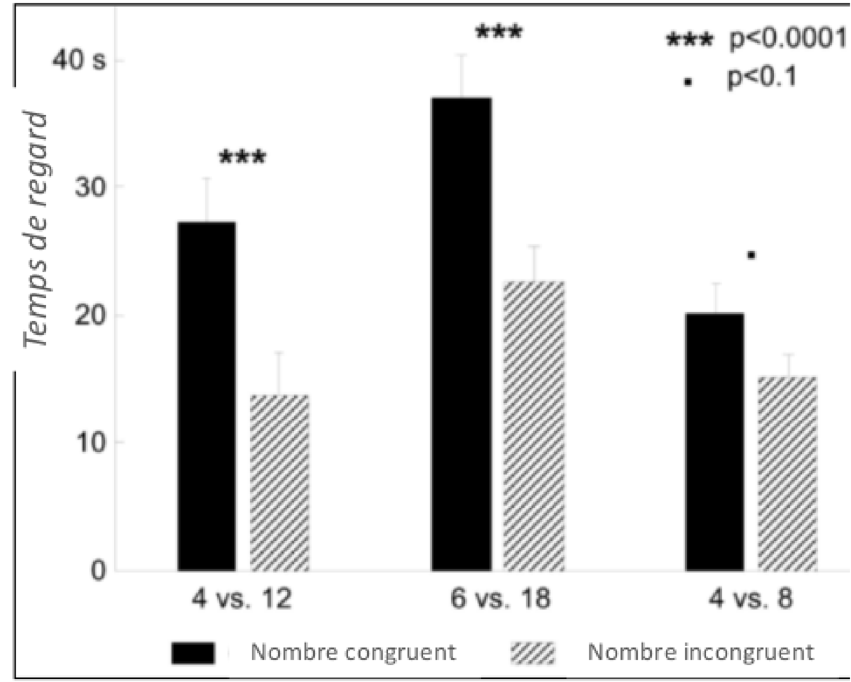
Calcul

Mais effet de taille et de distance

Des compétences précoces

Izard, V., Sann, C., Spelke, E. S., & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *PNAS*, *106*(25), 10382–5.

48 nouveau-nés d'âge moyen 49 heures (!) sont d'abord habitués à écouter des séries de sons.
Puis on mesure combien de temps ils fixent des diapositives contenant un nombre correspondant d'objets.



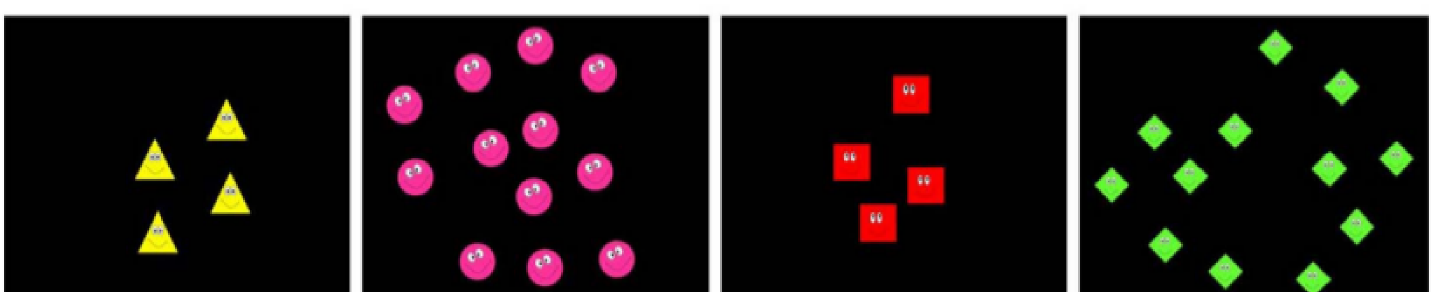
Familiarization (2 min)

12 ... " tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu " ... " ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra- " ...

or

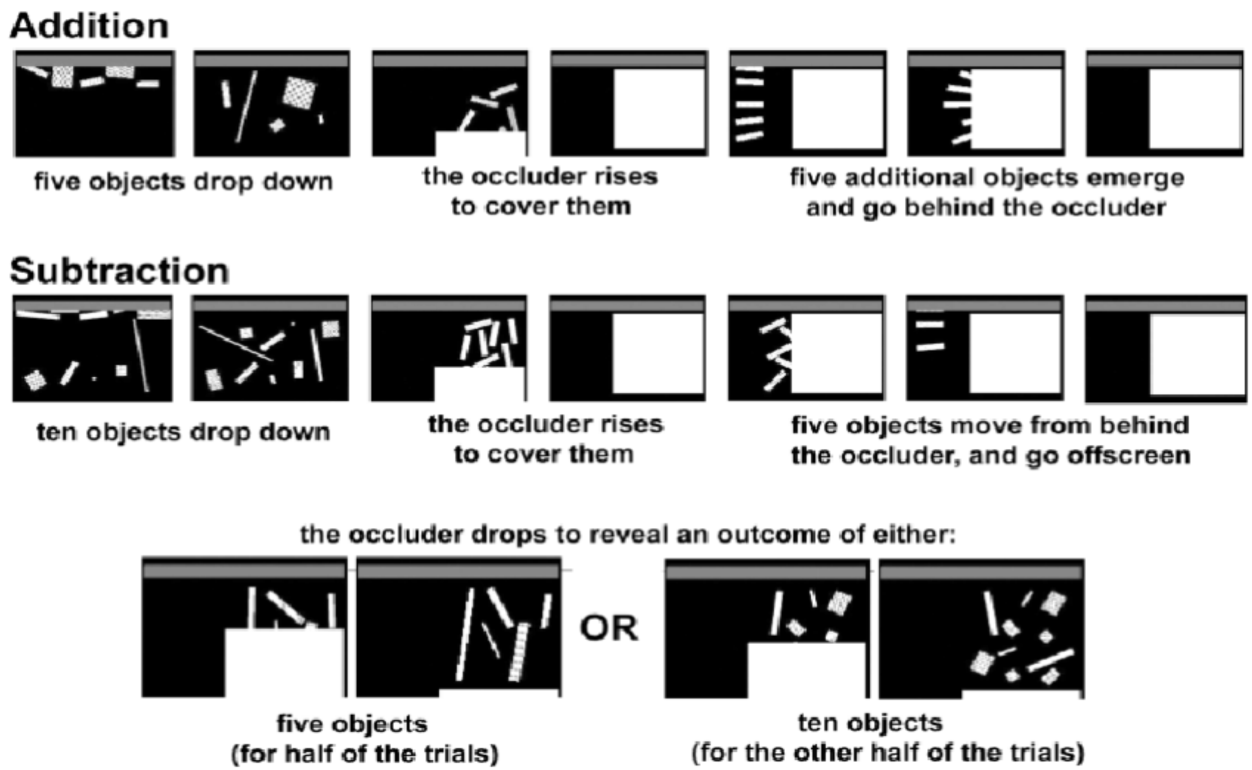
4 ... " tuuuuu-tuuuuu-tuuuuu-tuuuuu " ... " raaaaa-raaaaa-raaaaa-raaaaa " ...

Test (4 trials)



Les bébés regardent plus longtemps lorsque le nombre auditif et le nombre visuel correspondent.

Des capacités d'addition précoces

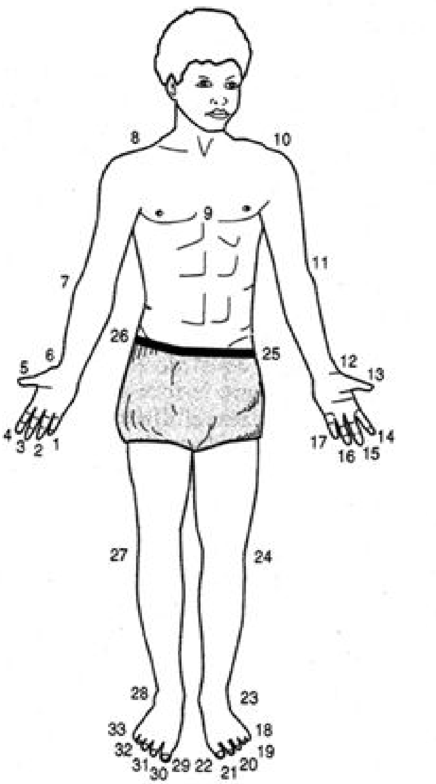


Les bébés de 5 mois réagissent en manifestant leur surprise: ils regardent plus longtemps l'événement impossible qu'un autre film où apparaît le résultat correct.

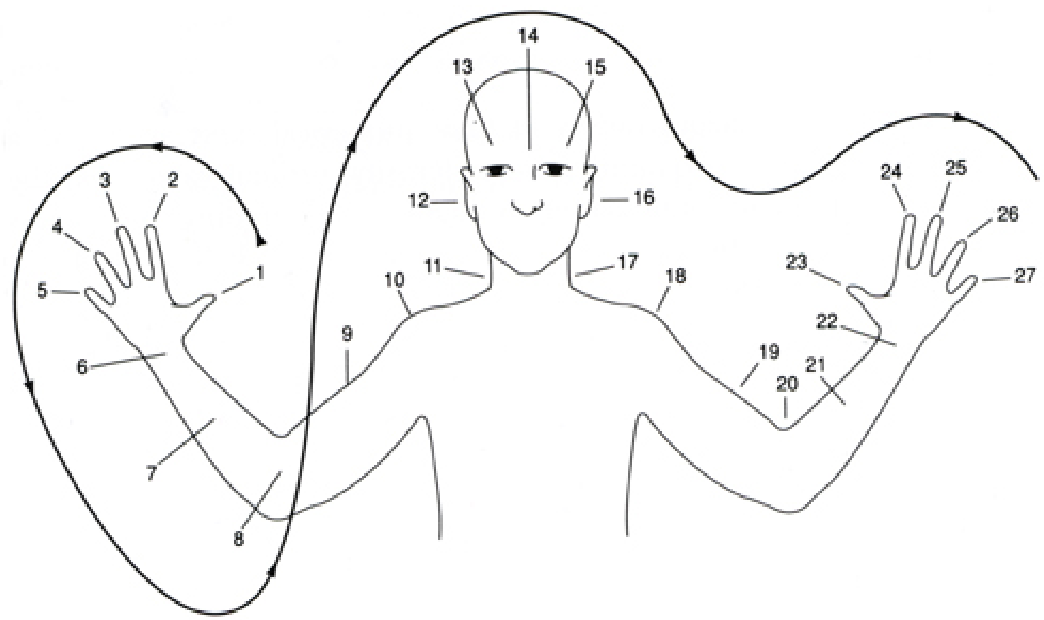
⇒ capables **d'anticiper les résultats approximatifs** d'opérations d'additions ou de soustractions

McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. Psychological Science, 15(11), 776-781.

- Une relation au monde



Peuple nord australie
(détroit Torres)



Système de calcul des Oksapmins (Papous
de nvelle guinée proche de l'Australie),
Saxe, 1982

Le cas des mundurukù (Pica & al., 2004)

- Peuple d'Amazonie
- Des mots pour des chiffres allant de 1 à 5.
- Pour compter se basent sur leurs doigts et leurs orteils

Peut-on calculer si l'on n'a pas de mots pour désigner les nombres ?

2 tâches : calcul exact et approximatif

➔Échec pour des calculs exact comprenant des ➔chiffres au-delà de 5 (eg, 6-4)

➔Capacité d'approximation comparable à la nôtre

➔ **Leur manière de compter les empêcherait d'associer un nom de nombre à une quantité au-delà de 5, or c'est cette capacité qui permettrait l'émergence d'une arithmétique précise**

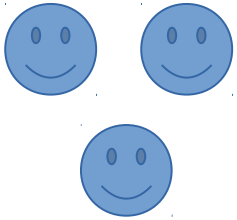
Le concept de nombre

Comment perçoit-on
le nombre ?

3 notions

Subitisation

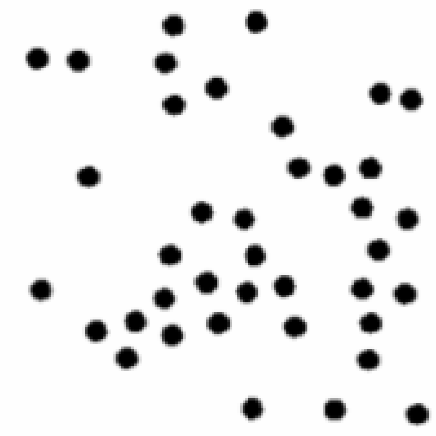
(Mandler & Shebo, 1982; Trick & Pylyshyn, 1994)



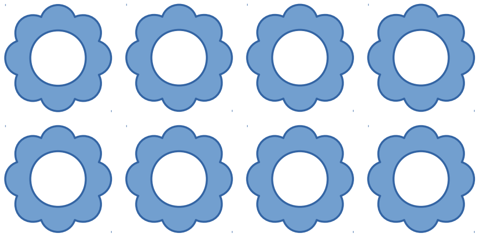
Estimation

(Izard et Dehaene, 2007 ; Lemaire, Arnaud & Lecacheur, 2004 ; Gandini, Ardiale & Lemaire, 2010)

43 x 72

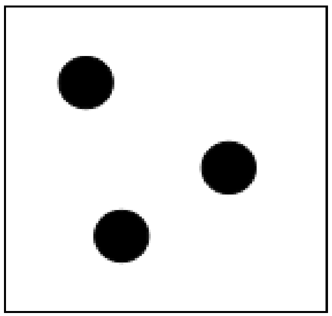


Comptage

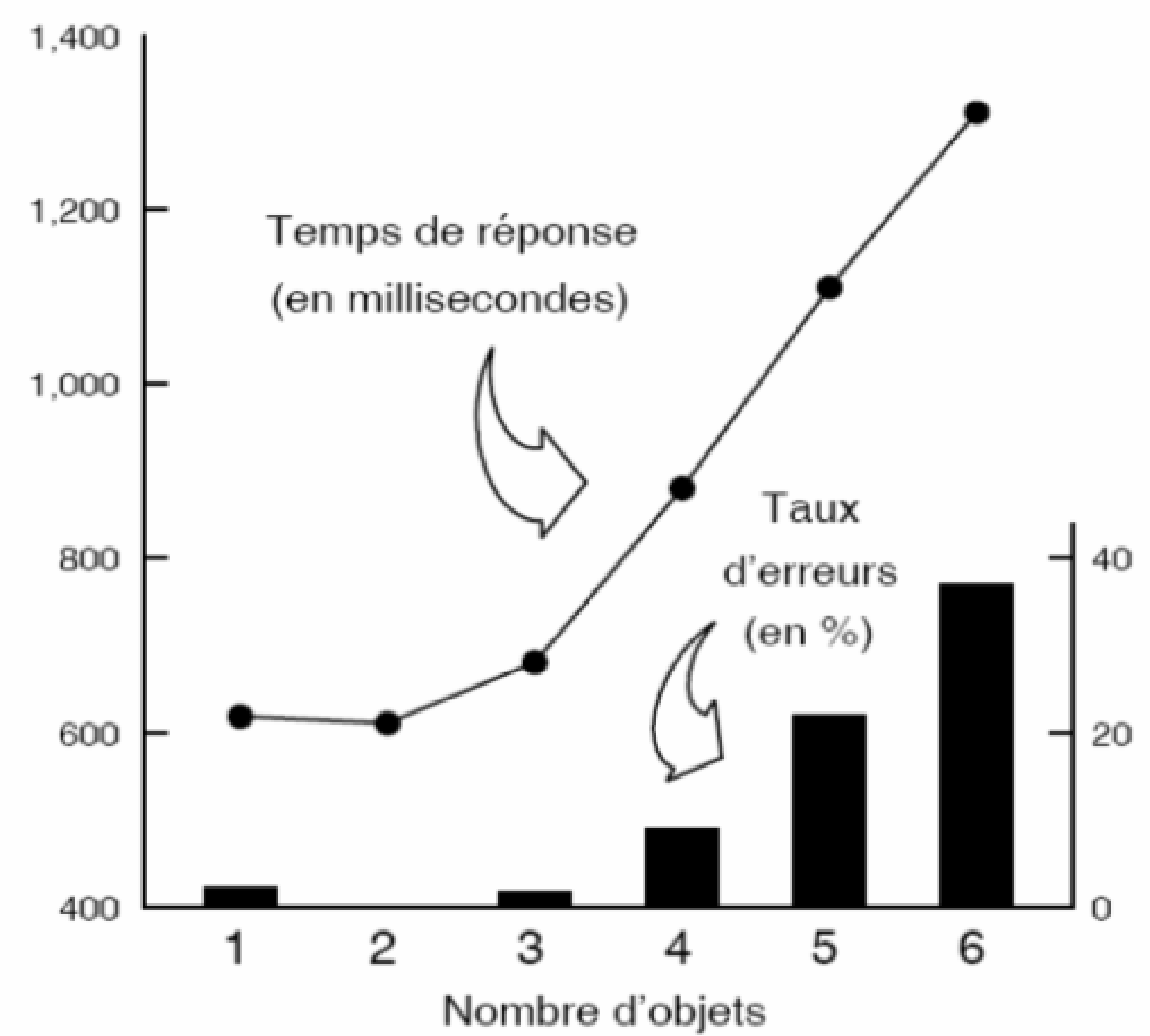


Subitisation

Combien d'objets?



Mandler & Shebo, 1982; Trick & Pylyshyn, 1994



• La « subitisation » s'arrête aux environs de 3

• Elle ne dépend pas de l'arrangement spatial (objets alignés)

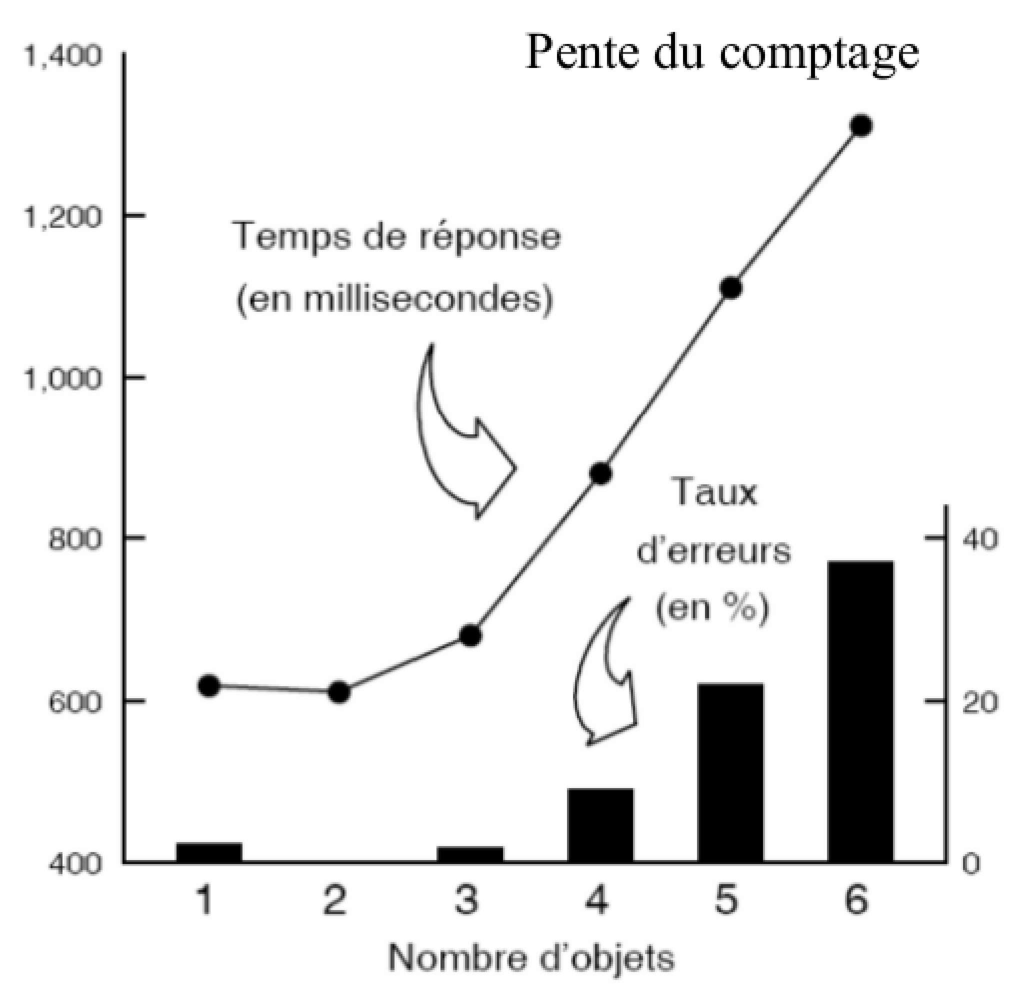
• Elle échoue si

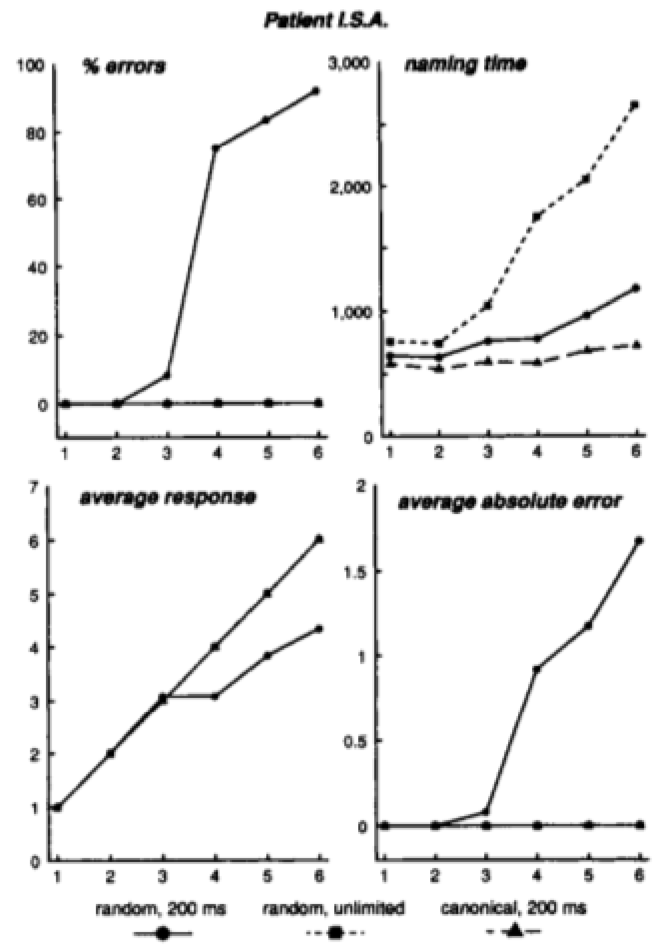
- Les objets sont superposés

- Les objets ne peuvent pas être isolés par la vision « pré-attentive »

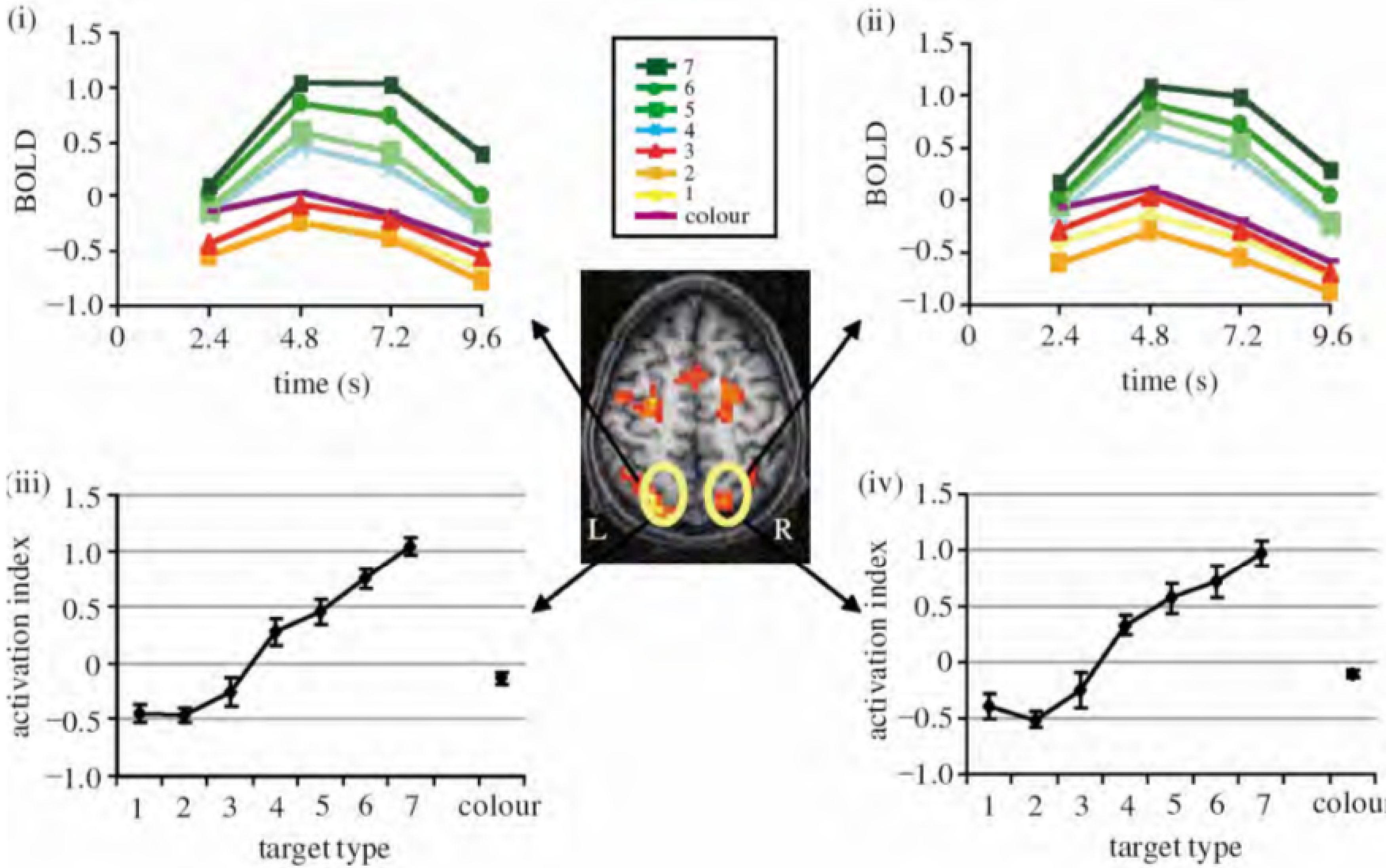
Comptage

Subitisation et comptage sont **dissociables:**
Les patients simultanagnosiques peuvent encore « subitiser » mais pas compter
(Cohen et Dehaene, JEP:HPP, 1994)





Subitisation et comptage font appel à des réseaux cérébraux distincts



Piazza, M., Giacomini, E., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2003). Single-trial classification of parallel pre-attentive and serial attentive processes using functional magnetic resonance imaging. *Proc R Soc Lond B Biol Sci, 270*(1521), 1237-1245.

Estimation : au quotidien

Estimation

Combien de points ?

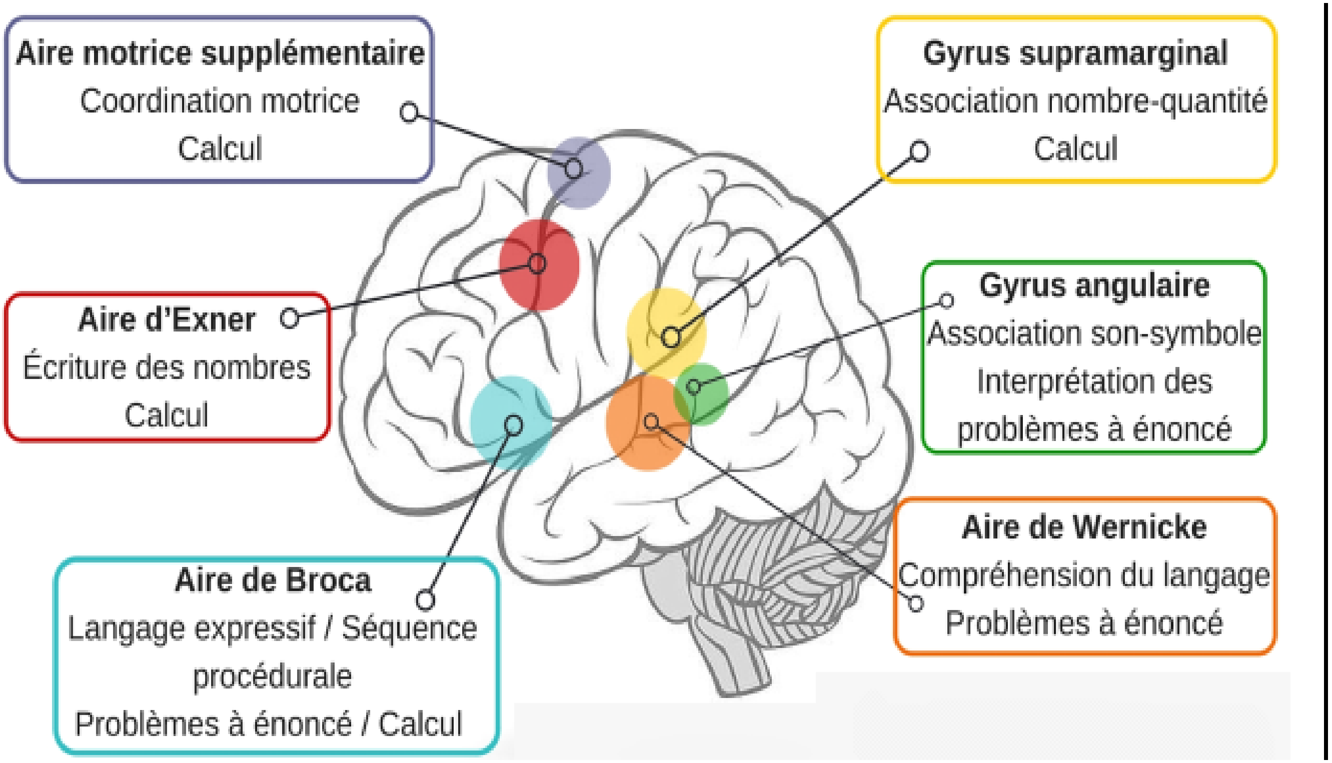
Evolution des capacités d'estimation

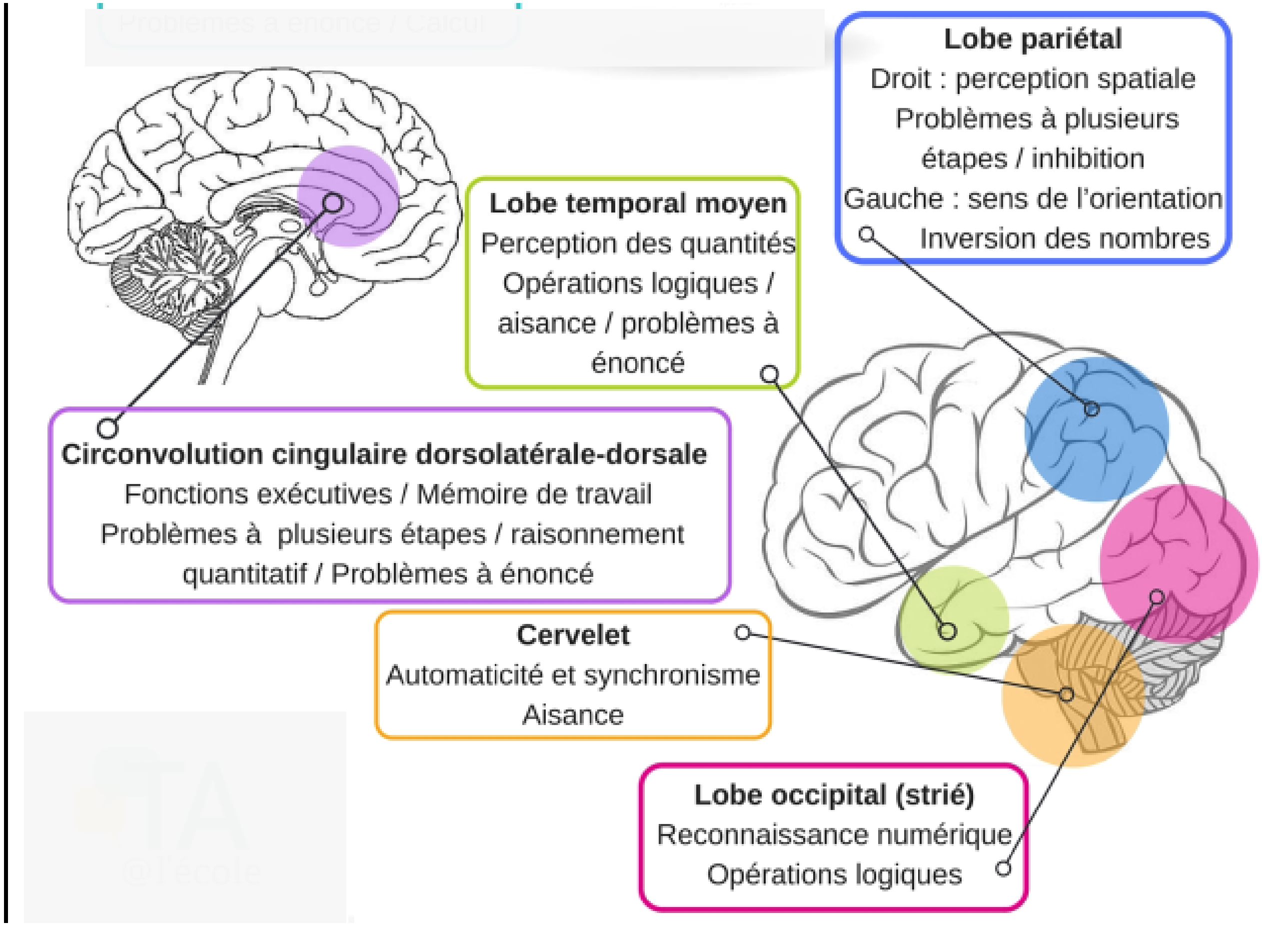
À 6 mois les bébés parviennent à distinguer les nombres du simple au double: ils font la différence entre 2 et 4, ou entre 4 et 8, et parviennent ainsi à savoir que 5+5 ne fait pas 5.

Dès leur 3ème année, ils sont capables de distinguer deux ensembles qui diffèrent d'environ 50% (4 contre 6)

À l'âge adulte, "l'acuité" du Système Numérique Approximatif atteint environ 15 à 20%, c'est-à-dire que nous savons faire la différence entre un ensemble de 8 objets et un autre de 9 ou 10 objets.

Une capacité qui évolue dans le temps et en lien avec d'autres compétences





Lobe pariétal
Droit : perception spatiale
Problèmes à plusieurs étapes / inhibition
Gauche : sens de l'orientation
Inversion des nombres
Lobe temporal moyen
Perception des quantités
Opérations logiques / aisance / problèmes à énoncé
Circonvolution cingulaire dorsolatérale-dorsale
Fonctions exécutives / Mémoire de travail
Problèmes à plusieurs étapes / raisonnement quantitatif / Problèmes à énoncé
Cervelet
Automaticité et synchronisme
Aisance
Lobe occipital (strié)
Reconnaissance numérique
Opérations logiques

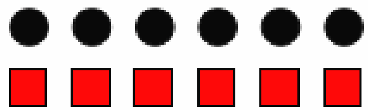
Le concept de nombre

Comment perçoit-on le nombre ?

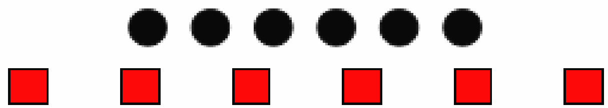
Son développement

Le développement du concept de nombre: La correspondance terme à terme

- Les tests Piagétiens
  - Conservation du nombre
    - Voici des verres et des bouteilles. Est-ce qu'il y a la même chose de ronds et de carrés?



    - Et maintenant, est-ce qu'il y a la même chose?



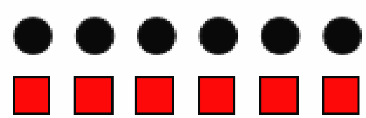
  - Inclusion des classes
    - J'ai des fleurs: deux roses et huit marguerites. Est-ce que j'ai plus de marguerites ou plus de fleurs?
- Hypothèse d'une lente construction mentale du nombre et de la logique (Papert, 1960)

« Pour le nourrisson, il n'existe même pas d'objets ; une première structuration est nécessaire pour que l'expérience s'organise en *choses*. Nous insistons sur le fait que le bébé ne *découvre* pas l'existence des objets comme un explorateur découvre une montagne, mais plutôt comme un homme découvre la musique: il en a entendu depuis des années, mais ce n'était, jusque là, que du bruit. Ayant « acquis les objets », l'enfant a un long chemin à parcourir avant d'arriver à l'étape des classes, des sériations, des emboîtements et, enfin, du nombre. »

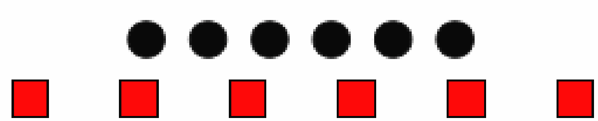
Deux réfutations expérimentales de l'importance de la tâche de conservation du nombre

- Mehler & Bever, *Science* (1967): les enfants de trois ans réussissent le test lorsqu'on sollicite leur motivation de façon non-verbale (avec des *M&M*'s!)

- McGarrigle & Donaldson, *Cognition* (1974): les enfants réussisent lorsqu'il y a une bonne raison de leur poser deux fois la même question (par exemple parce qu'une tierce personne bouscule l'arrangement des objets)
  - Voici des verres et des bouteilles. Est-ce qu'il y a la même chose de ronds et de carrés?



  - L'expérimentateur se détourne. Un complice bouscule l'arrangement des points. L'expérimentateur se retourne et demande « Et maintenant, est-ce qu'il y a la même chose? »



L'apprentissage du comptage

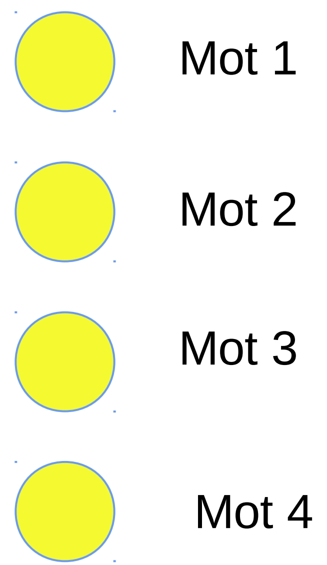
- 2 théories :
  - Gelman : une théorie innéiste
  - Fuson : une théorie constructiviste (l'après Piaget)

Théorie innéiste de Gelman (70's)

5 principes pré-existant (innés) permettant et favorisant l'apprentissage du comptage :

– Correspondance terme à terme

(On avance d'un mot pour chaque objet compté)



Théorie innéiste de Gelman (70's)

5 principes pré-existant (innés) permettant et favorisant l'apprentissage du comptage :

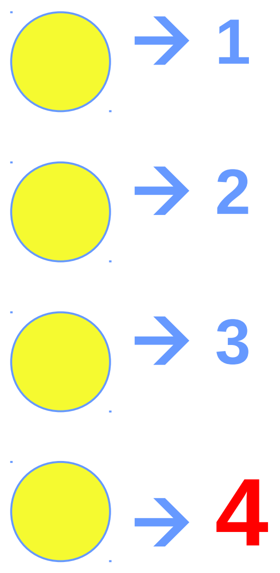
- Correspondance terme à terme
  (On avance d'un mot pour chaque objet compté)
- Suite stable
  (Récitation des mots dans un ordre fixe)

Un … deux … trois … quatre ...

Théorie innéiste de Gelman (70's)

5 principes pré-existant (innés) permettant et favorisant l'apprentissage du comptage :

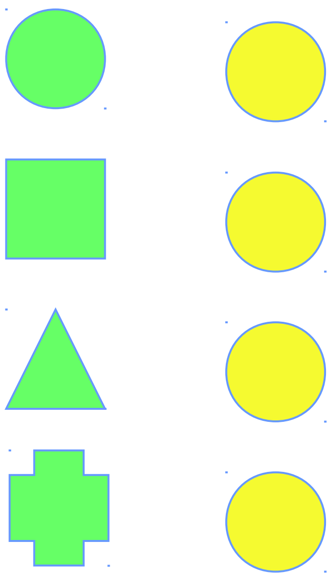
- Correspondance terme à terme
  (On avance d'un mot pour chaque objet compté)
- Suite stable
  (Récitation des mots dans un ordre fixe)
- Cardinal
  (Le dernier mot donne le cardinal de l'ensemble compté)



Théorie innéiste de Gelman (70's)

5 principes pré-existant (innés) permettant et favorisant l'apprentissage du comptage :

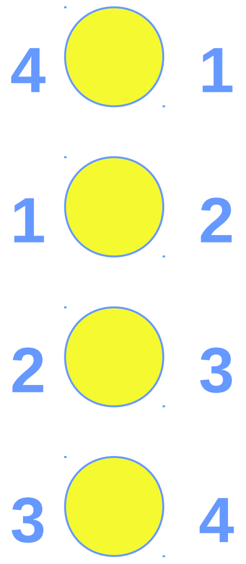
- Correspondance terme à terme
  (On avance d'un mot pour chaque objet compté)
- Suite stable
  (Récitation des mots dans un ordre fixe)
- Cardinal
  (Le dernier mot donne le cardinal de l'ensemble compté)
- Abstraction
  (Toute collection d'objets peut être comptée)



Théorie innéiste de Gelman (70's)

5 principes pré-existant (innés) permettant et favorisant l'apprentissage du comptage :

- Correspondance terme à terme
  (On avance d'un mot pour chaque objet compté)
- Suite stable
  (Récitation des mots dans un ordre fixe)
- Cardinal
  (Le dernier mot donne le cardinal de l'ensemble compté)
- Abstraction
  (Toute collection d'objets peut être comptée)
- Non pertinence de l'ordre
  (Les objets peuvent être comptés dans n'importe quel ordre)



Théorie innéiste de Gelman (70's)

5 principes pré-existant (innés) permettant et favorisant l'apprentissage du comptage :

- Correspondance terme à terme
  (On avance d'un mot pour chaque objet compté)
- Suite stable
  (Récitation des mots dans un ordre fixe)
- Cardinal
  (Le dernier mot donne le cardinal de l'ensemble compté)

Savoir-faire procéduraux

- Abstraction
  (Toute collection d'objets peut être comptée)
- Non pertinence de l'ordre
  (Les objets peuvent être comptés dans n'importe quel ordre)

Entités sur lesquelles appliquer ces savoir-faire

5 principes pré-existant (innés) permettant et favorisant l’apprentissage du comptage :

- Les enfants savent faire très précocement

- MAIS ne savent pas pourquoi, notion de cardinal tardive (Fuson, 1988)

La perspective de Fuson

- Pour Fuson (1988, 1995), le comptage :
  - Activité culturelle
  - Résulte de l'apprentissage d'une règle culturellement établie à partir de procédure d'actions culturellement spécifiées (cf. Munduruku)

➔ Vise à connecter un objet compté à « un objet comptant » : le mot-nombre

Fuson et al. (1982)

- Quatre niveaux de connaissance de la chaîne des nombres :

  1- Le chapelet undeuxtroisquatre

  2-La liste non sécable un-deux-trois-quatre

  3- La chaîne sécable quatre-cinq-six-sept

  4- La chaîne dénombrable

  5- La chaîne terminale

Plusieurs étapes dans l'acquisition de la chaîne numérique

Tableau 2.4: Exemples de suites numériques obtenues du même enfant à partir d'essais successifs (d'après Fuson et al. ibid.).

1	2	3	4.........6	8	9	....	14	16	13	5
1	2	3	4.........6	8	9	....	12	15	16	13
1	2	3	4.........6	8	9	....	14			
1	2	3	4.........6	7	9	....	9			
1	2	3	4.........6	8	9	....	15	13	11	
1	2	3	4.........6	8	9	....	8	4		

Première partie
Adéquate : succession des termes stable et conventionnelle

Seconde partie
plus conventionnelle (omission ou inversion) mais stable

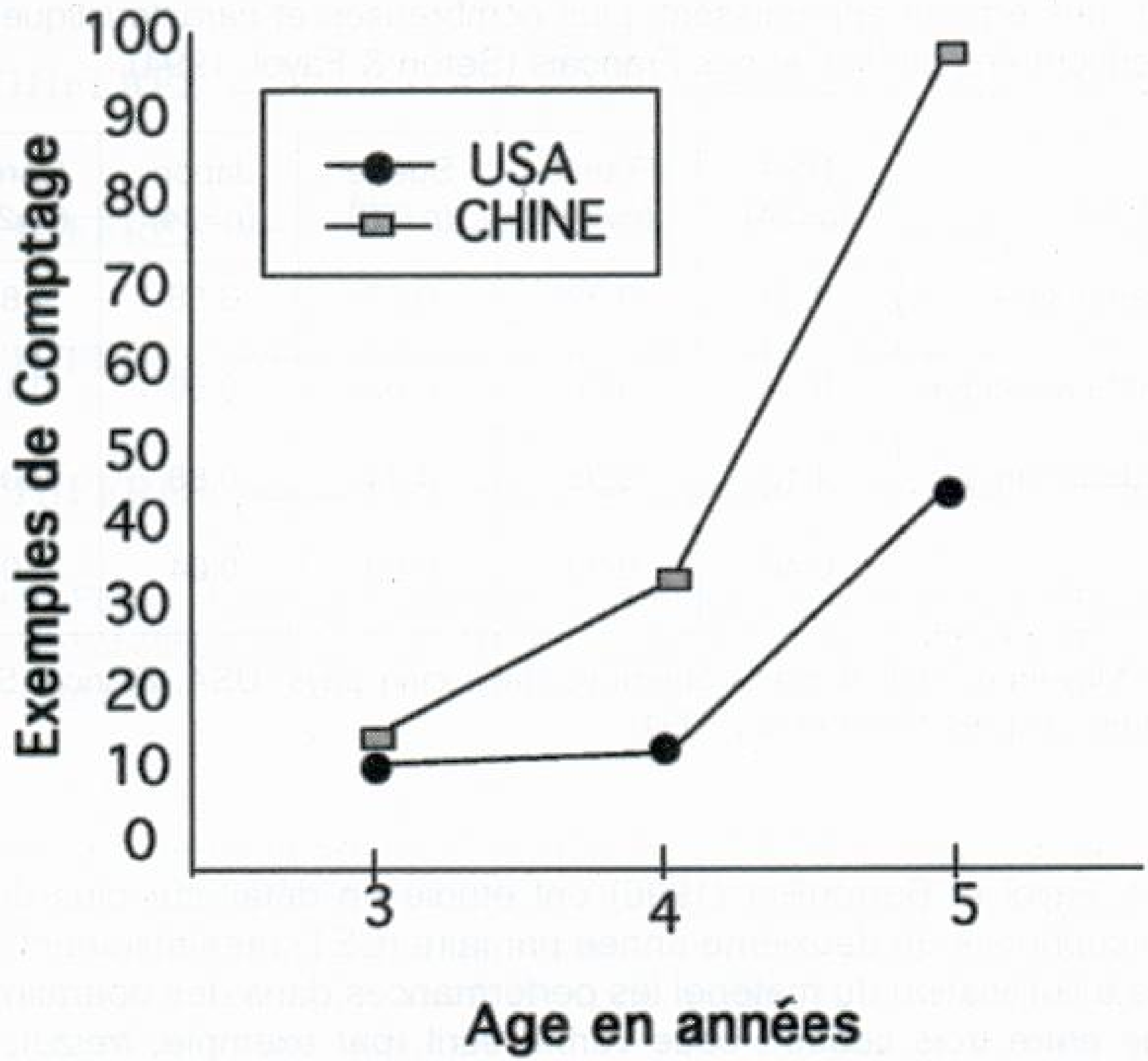
Troisième partie
ni stable
ni conventionnelle

Evolution de l'acquisition de la chaîne numérique, la part du culturel

- De type « généralisation/extension »

	Français	Anglais	Chinois
1	un, une	one	yi
2	deux	two	er
3	trois	three	san
10	dix	ten	shi
11	onze	eleven	shi yi
12	douze	twelve	shi er
13	treize	thirteen	shi san
20	vingt	twenty	er shi
21	vingt et un	twenty-one	er shi yi
22	vingt-deux	twenty-two	er shi er
23	vingt-trois	twenty-three	er shi san

Tableau 1 : Exemples d'expressions numériques en Français, Anglais et Chinois.


USA
CHINE
Exemples de Comptage
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
3
4
5
Age en années

En même temps que l’acquisition de la chaîne numérique…

- Progression dans le comptage d’objets : mise en correspondance des éléments d’une collection avec la suite des mots-nombre en respectant de plus en plus l’ordre conventionnel

Un lien entre nombre et espace

L'effet « SNARC »

(*Spatial Numerical Association of Response Codes)*

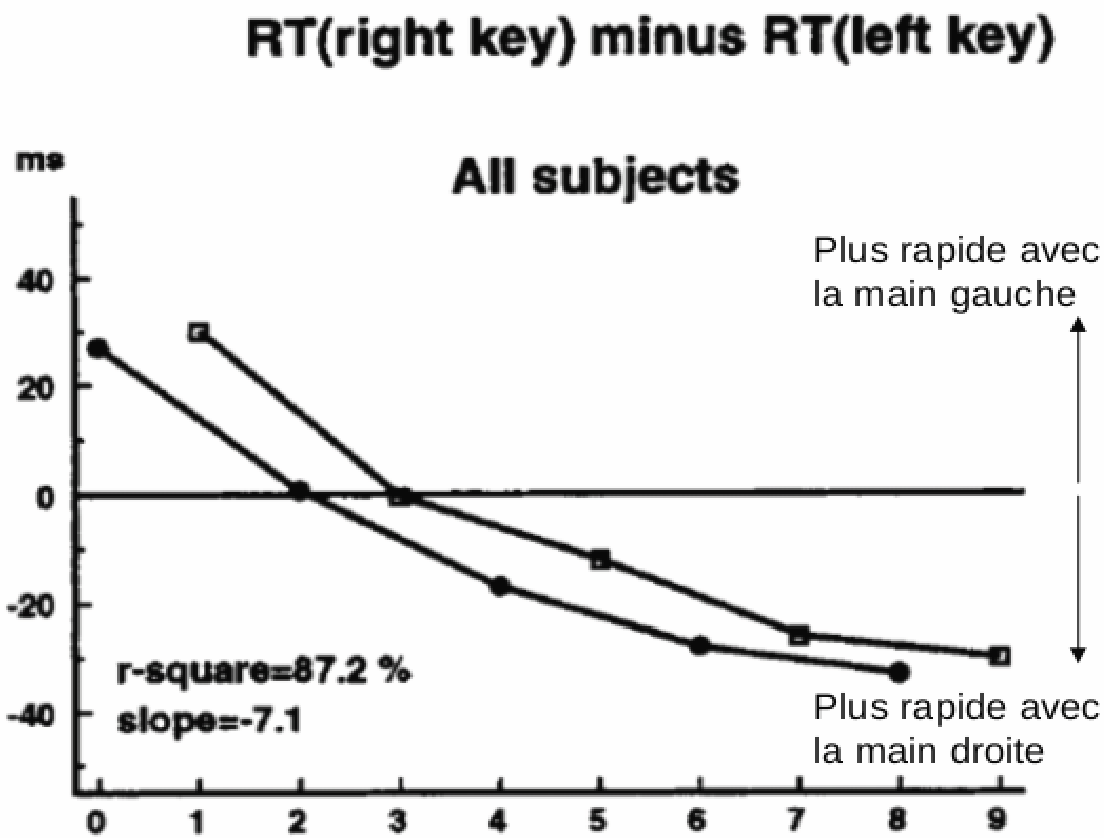
(Dehaene, Bossini & Giraux 1993)

•Jugement de parité sur des chiffres de 0 à 9

•Dans certains blocs, la réponse « pair » est à main droite et la réponse « impair » à main gauche, dans d'autres blocs c'est le contraire.

•En conséquence, on obtient pour chaque nombre un temps de réaction à main droite et un temps de réaction à main gauche.

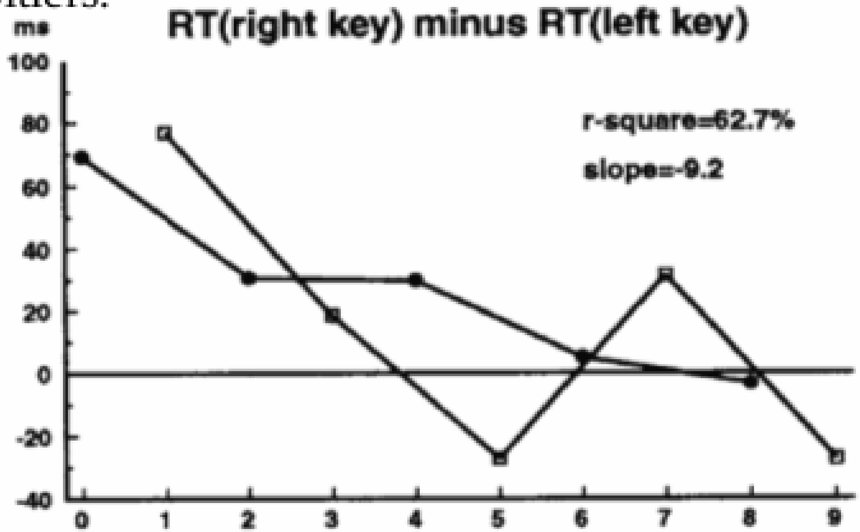
•Découverte fortuite: quelle que soit leur parité, on répond plus vite aux petits nombres avec la main gauche et aux grands nombres avec la main droite.



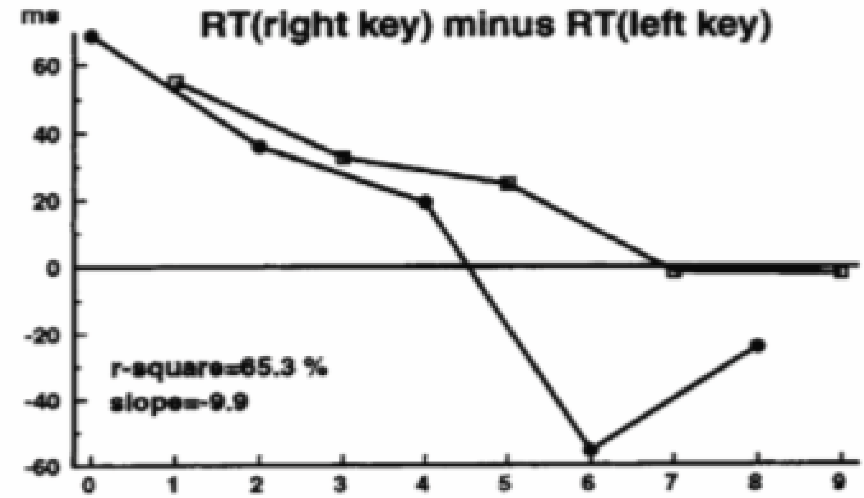
Les déterminants de la direction de l'effet SNARC

(Dehaene, Bossini & Giraux 1993)

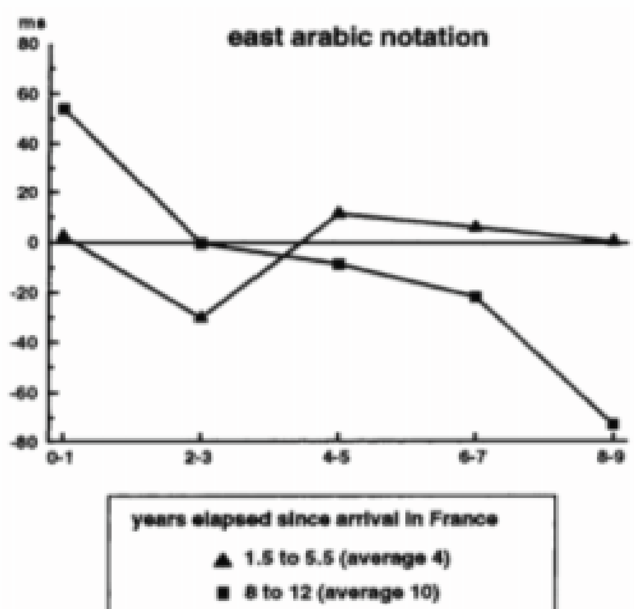
L'effet est identique chez les gauchers et chez les droitiers.



Il ne change pas quand on croise les mains (c'est l'espace qui compte, pas la main de réponse)



L'effet a tendance à s'inverser chez des sujets qui lisent de droite à gauche.



L'inversion de l'effet chez les lecteurs de droite à gauche est confirmée par les études de Zebian (2005) et de Fischer et coll. (soumis).

Cependant, le sens de la lecture n' est probablement qu'un des aspects d'un biais culturel plus vaste qui impose une direction préférentielle au sens du temps, du nombre, et de l'espace.

Les débuts du comptage
et l'importance du pointage

Les débuts du comptage

- Avant 4 ans:
  - subitisation sur les pts nb
  - Élaboration de la chaîne numérique
- A 4 ans :
  - Sans compter ni subitiser les enfants parviennent à dénommer des configurations familières (cf. Benoit, & al. 2004)
- Entre 4 et 8 ans,
  - Mise en place des rapports de connexité entre les chiffres (n+1)
  - Mais les enfants restent encore tributaire de l'organisation spatiale de éléments

Ainsi

- Au moins trois systèmes distincts contribuent au « sens du nombre »:

1. La subitisation pour les ensembles de 1, 2 ou 3 objets
2. L'estimation de la numérosité, bien au-delà de 3 objets
3. Le comptage, fondé sur la correspondance terme-à-terme, pour parvenir à la cardinalité exacte

La subitisation et l'estimation sont présents très précocement chez l'enfant, et existent également chez de nombreuses espèces animales

- Ces processus numériques confèrent à l'enfant, très précocement, le « sens du nombre » et une capacité de calcul approximatif

- A l'âge adulte, nous continuons à accéder rapidement à la représentation analogique des nombres, même lorsque ceux-ci nous sont présentés sous forme de symboles

Dés 2 ans :

- Subitisation des ptes quantités

- Début du comptage : rôle du pointage en lien avec les mots-nb

Rôle du pointage dans le dénombrement

Enfants de
3 et 4 ans

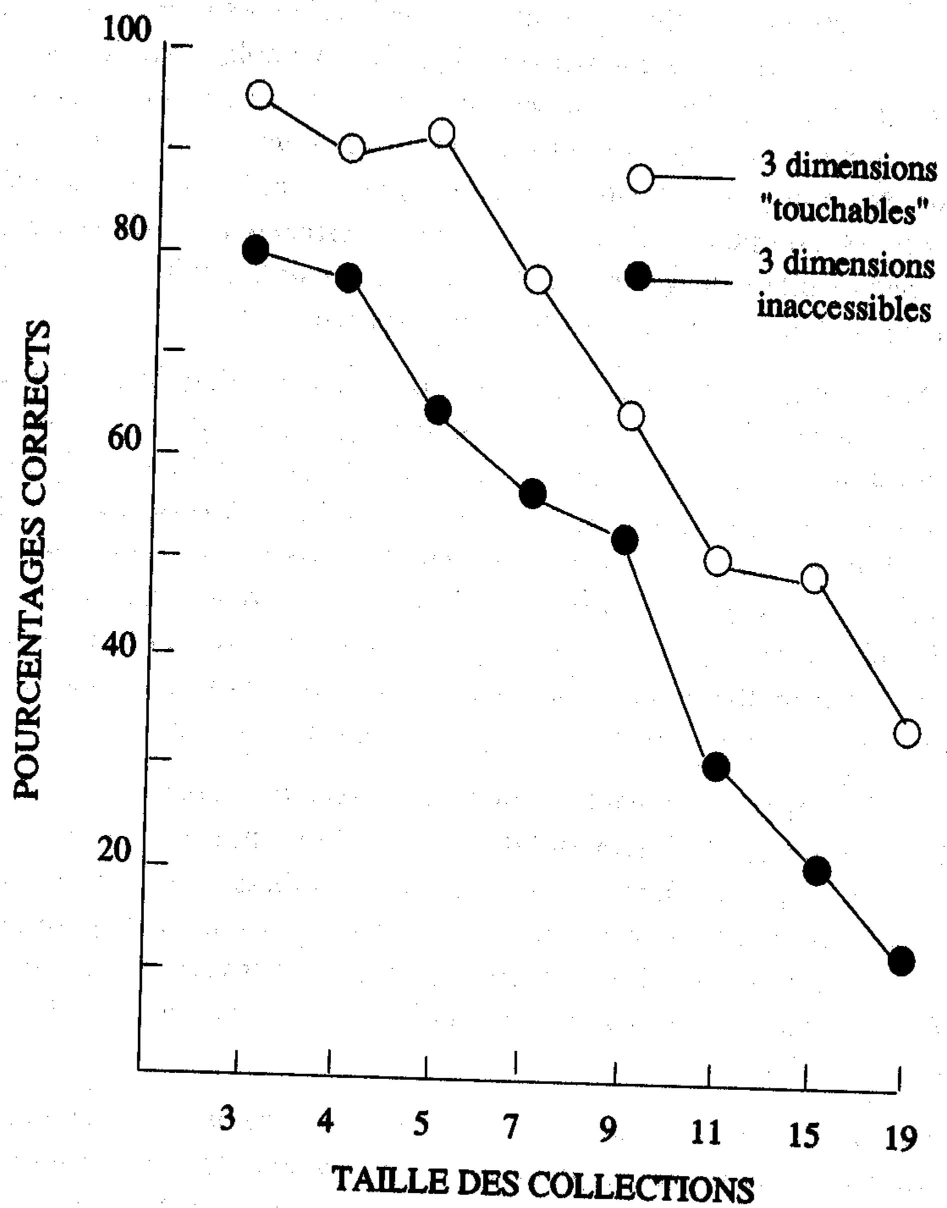


Figure 3.5. - Pourcentages de réponses exactes en fonction de la taille des collections et de l'accessibilité des éléments à dénombrer (d'après Gelman et Meck, 1983 p. 355).

Alibali & Di Russo (1999) : Le geste de pointage : Enfants de 4 ans

- Trois types de conditions :
  - 1-Production du comptage sans avoir le droit de pointer
  - 2-Production du comptage en pointant (ou touchant)
  - 3-Marionnette assure les pointages (ou touchers) pendant que l'enfant compte.

Voir aussi Crollen & Noël (2015) sur l'effet de mouvements interférents

Dénombrement et pointage

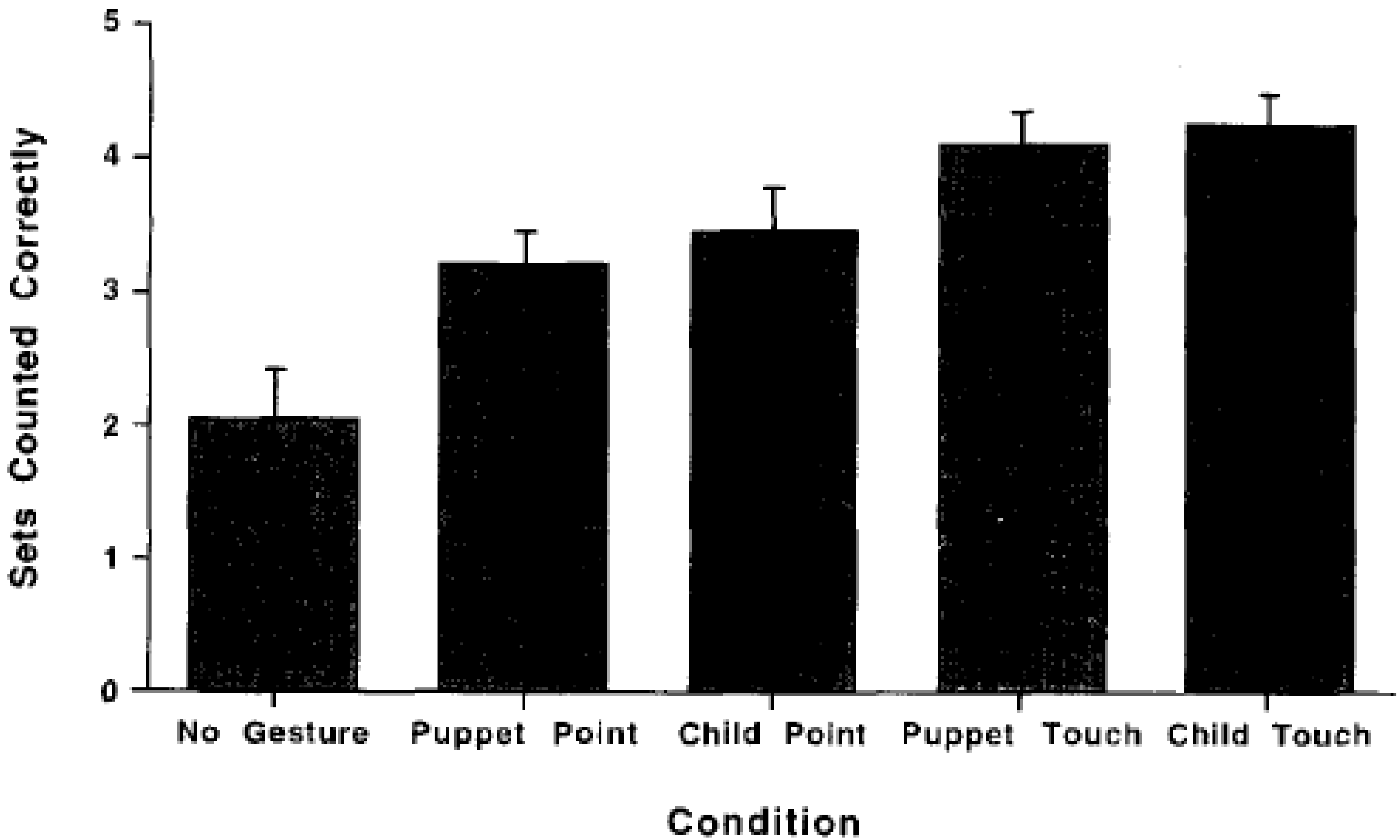


Figure 1. Mean number of sets counted correctly (out of 5 possible) in each experimental condition. The error bars represent standard errors.

Alibali & Di Russo (1999) : Le geste de pointage

- Double rôle :
  - Garder la trace de ce qui est déjà compté et de ce qui reste à compter (c'est ce qu'assure la marionnette)
  - Faciliter la coordination entre les mots prononcés et chaque objet à compter.

Effet de la dyspraxie ?

Le calcul mental

A – L'addition

Groen & Parkman (1972)

Objectif : comprendre comment l'enfant et l'adulte résolvent des additions élémentaires.

Hypothèse : 2 catégories de mécanisme :

- Stratégie reproductive : récupérer les solutions en MLT
- Stratégie reconstructive : faire appel à une procédure de calcul afin de reconstituer la réponse

Méthode :

- 55 additions (somme < ou = à 9) à résoudre répétées 6 fois
- enfants de CP et adultes

Résoudre 3 + 2 : 5 possibles/stratégies

(1+1) + (1+1+1)	M1 : compteur mis à 0, m et n st successivement additionnés en incrémentant de 1 à chaq fois
3 + (1+1)	M2 : compteur à m puis n est ajouté par incrémentation de 1
2 + (1+1+1)	M3 : compteur à n puis m est ajouté par incrémentation de 1
2 + (1+1+1)	M4 : compteur initialisé sur le **plus pt nb** de m/n puis le plus grand est ajouté par incrémentation de 1
3 + (1+1)	M5 : compteur initialisé sur le **plus gd nb** de m/n puis le plus petit est ajouté par incrémentation de 1

⇒ Tester lequel des modèles est le meilleur reflet des temps de réponses obtenus

Résultats

Au CP :

→ comptage de un en un à partir du + gd nb = M5

Adulte :

→ récupération MLT sf rares exceptions (aucune différences entre les modèles)

➔ Quand a lieu le passage du comptage à la récupération ?

Ashcraft (1982), Ashcraft & Fierman (1982)

- Tâche de jugement : observation du temps de réaction

2 + 3 = 4 Vrai Faux

2 + 4 = 11 Vrai Faux

- Enfants de primaire (CP, CE2, CM1, CM2)

  Collège : 6ème

Résultats

- La distinction semble se faire au CE2 : cette population se scinde en 2 sous groupes : certains agissent comme au CP (comptage) quand d'autres semblent se comporter comme des adultes (récupération) même si leurs temps de réponse sont plus longs

B – La soustraction

Wood, Resnik & Groen (1975)

- Enfants CE1, CE2, CM1 : utilisation de 2 stratégies : incrémentation et décrémentation

  → 8 – 2 : 8 – 1 – 1 = 6

  → 8 – 5 : 5 (+1) → 6 (+1) → 7 (+1) → 8

- Petit à petit de plus en plus de récupération

La question des stratégies...

- Les enfants utilisent une diversité de stratégies dans les problèmes familiers

➔ Ignorer cette diversité peut conduire à une vision distordue de la réalité

- Ils choisissent les stratégies de manière adaptative (tous les choix ne dépendant pas d'une connaissance métacognitive explicite)

Siegler R.S. (2000) **Intelligences et développement de l'enfant. Variations, évolution, modalité.** Bruxelles : De Boeck Université. (traduction de Emerging minds par I. Bonnotte & P. Lemaire)

Siegler suite….

- Des connaissances associatives dirigent au moins certains choix de stratégies
- Parmi les facteurs qui influencent les choix : Fréquence de rencontres avec le problème, difficultés relatives des stratégies, connaissances de problèmes liés.
- Des différences interindividuelles dans le choix des stratégies.

Des changements de performance

- **Deux types de changements quantitatifs** sur les performances :
  - Augmentation de l'exactitude
  - Augmentation de la vitesse d'exécution

sous-tendus par 6 types de changements sur les stratégies ….

Six types de changements stratégiques

1- Acquisition de stratégies nouvelles

2- Changements dans la fréquence d'utilisation des stratégies existantes

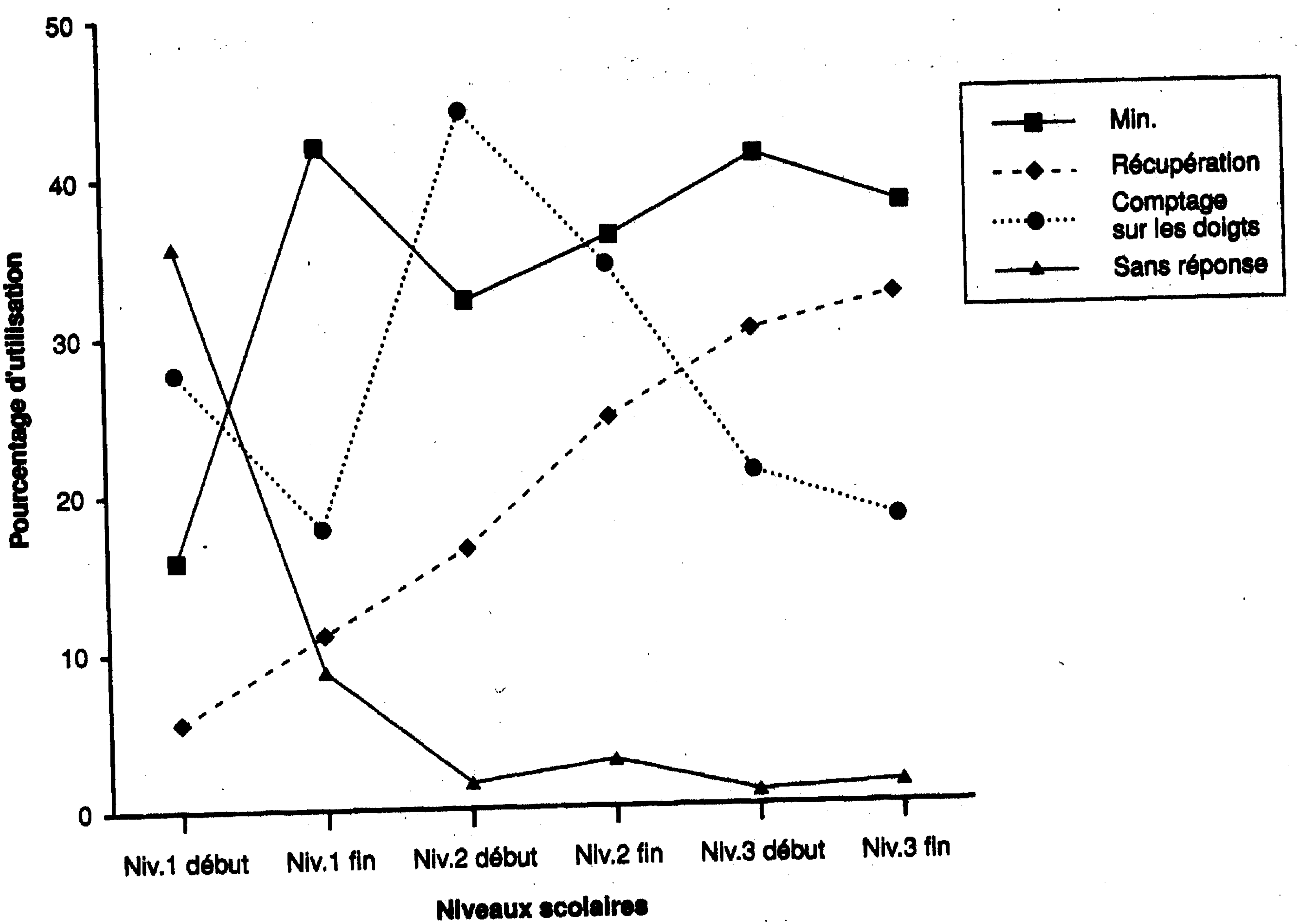
3- Changements dans la vitesse d'exécution des stratégies

4- Changements dans l‘exactitude de l'exécution des stratégies

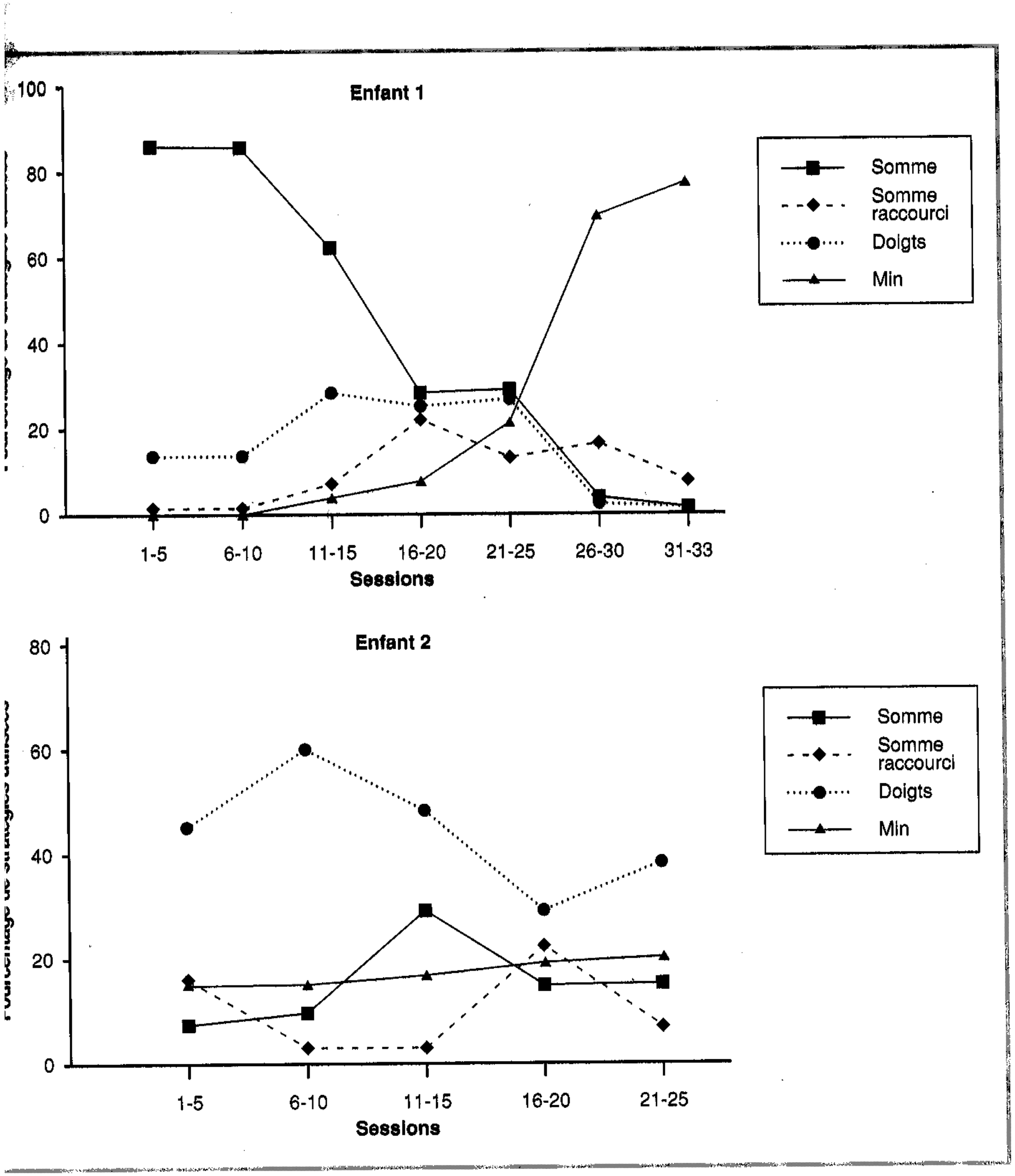
5- Changements dans l'automaticité d'exécution des stratégies

6- Changements dans la diversité des problèmes à propos desquels chaque stratégie peut être utilisée.

D’après Svenson & Sjoberg, 1983



Siegler & Jenkins (1989) : variabilité intra-individuelle



% d’erreur : Indicateur de la difficulté d’un problème ou indicateur de la faible efficacité des stratégies avec aide externe ?

Siegler & Shrager (1984)

- Enfants pré –scolaires
- Condition 1 : Donner la 1ere réponse qui vient à l’esprit sachant que le temps disponible est < 4sec.
- Condition 2 : autorisés à utiliser des stratégies B.U.
- Résultats : 47 % BR en C1 et 74% en C2.

Adaptabilité aux variations de situations

- Trois ensemble de pbes soustractifs :
- C1: Le seul but important : répondre correctement
- C2: Le seul but important : répondre rapidement
- C3 : Les deux buts, vitesse et exactitude sont également importants

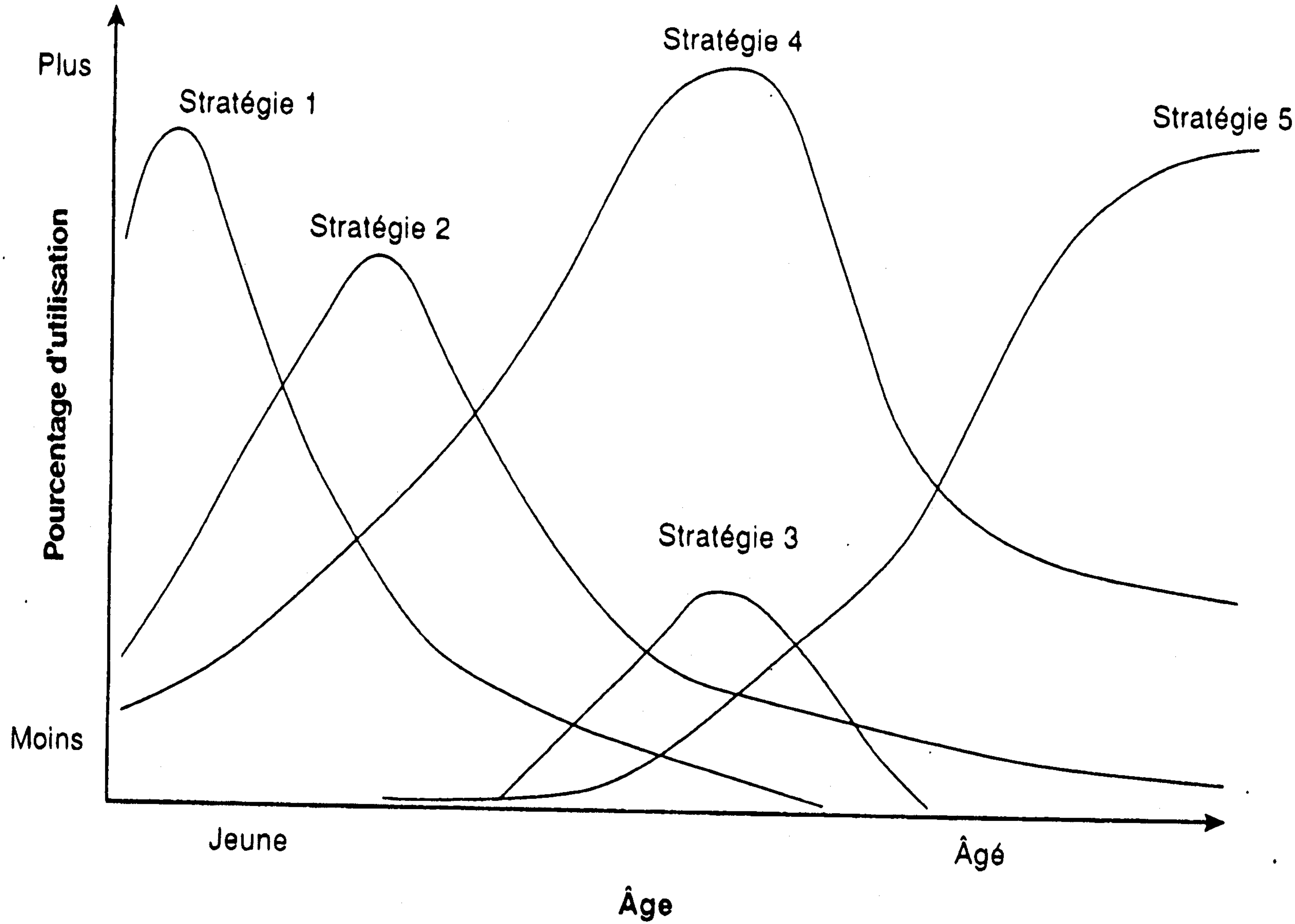
Résultats

- Plus de rép correctes en consigne exactitude
- Tps de résolution plus courts en consigne vitesse
- Pas de différence dans la distribution des stratégies entre les 3 conditions.

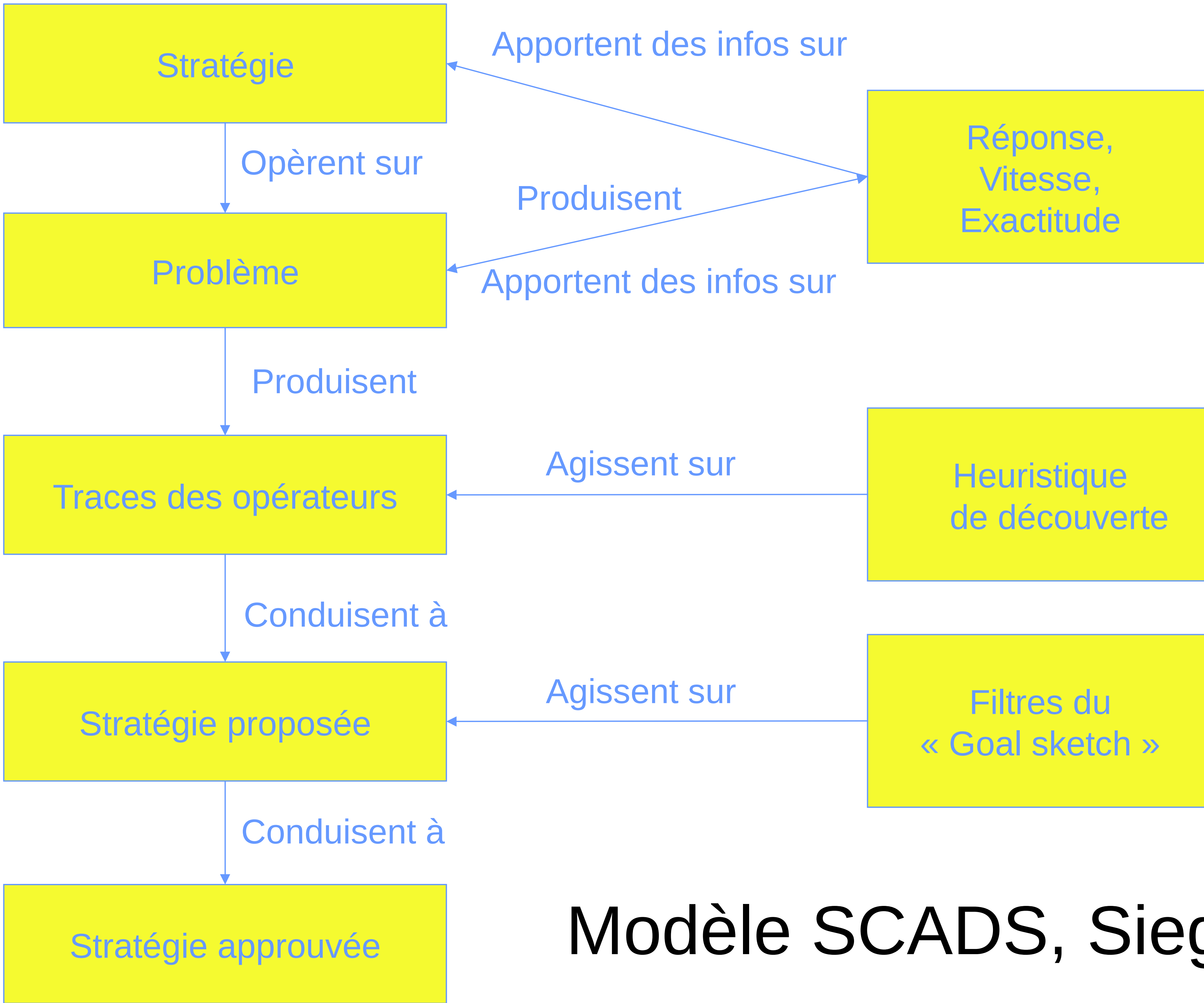
- Les consignes n’ont pas influencé le processus de sélection mais l’exécution des stratégies.

Connaissances sur les stratégies

- <u>Fondées sur les données</u>
- <u>Inférées</u> sur la base des précédentes résolutions: permettent de juger de la pertinence d’utiliser une strat. dans un problème donné
- Pour chaque stratégie, des données sur :
  - Vitesse d’exécution
  - Degré d’exactitude
  - Nouveauté (Points « nouveauté »)



Plus
Moins
Pourcentage d'utilisation
Stratégie 1
Stratégie 2
Stratégie 3
Stratégie 4
Stratégie 5
Jeune
Âgé
Âge



Modèle SCADS, Siegler

Quand la pathologie éclaire la théorie… la dyscalculie

5 hypothèses explicatives :

1 - déficit inné à traiter les quantités numériques (Molko, Wilson, & Dehaene, 2005) = « sens » du nombre déficient

2 - difficulté à greffer les codes symboliques sur les représentations analogiques (Noël, Rousselle, & De Visscher, 2013 ; Rousselle & Noël, 2007)

déficit primaire de traitement du nombre

Quand la pathologie éclaire la théorie… la dyscalculie

5 hypothèses explicatives :

- Déficit des traitements visuo-spatiaux (Rourke, 1993 ; Szűcs et al., 2013) : difficultés de reconnaissances des chiffres (6-9), d'organisation d'une opération dans l'espace, d'orientation de leur ligne numérique mentale

déficit 2aire = consécutif à un dysfonctnt d’une habileté plus générale

Quand la pathologie éclaire la théorie… la dyscalculie

5 hypothèses explicatives :

- Déficit des traitements visuo-spatiaux (Rourke, 1993 ; Szűcs et al., 2013) : difficultés de reconnaissances des chiffres (6-9), d'organisation d'une opération dans l'espace, d'orientation de leur ligne numérique mentale
- Défaut d'inhibition (Bull et Scerif, 2001) :l' aptitude à supprimer l'information en mémoire de travail est importante notamment pour ignorer les résultats intermédiaires lors d'un calcul complexe (Szucs et al., 2013) ou pour éviter les confusions entre tables arithmétiques tels que 2 + 3 = 6 (De Visscher, Szmalec, Van Der Linden, & Nöel, 2015)

déficit 2aire = consécutif à un dysfonctnt d'une habileté plus générale

Quand la pathologie éclaire la théorie… la dyscalculie

5 hypothèses explicatives :

Déficit des traitements visuo-spatiaux (Rourke, 1993 ; Szűcs et al., 2013) : difficultés de reconnaissances des chiffres (6-9), d'organisation d'une opération dans l'espace, d'orientation de leur ligne numérique mentale

- Défaut d'inhibition (Bull et Scerif, 2001) :l' aptitude à supprimer l'information en mémoire de travail est importante notamment pour ignorer les résultats intermédiaires lors d'un calcul complexe (Szucs et al., 2013) ou pour éviter les confusions entre tables arithmétiques tels que 2 + 3 = 6 (De Visscher, Szmalec, Van Der Linden, & Nöel, 2015)
- Déficit des capacités en mémoire de travail : passage du comptage à la récupération nécessite que l'association entre opérandes et résultat soit possible et qu'ainsi ces trois informations (2 opérandes + 1 résultats) puissent se trouver en même temps dans l'espace de stockage et de traitement que constitue la mémoire de travail (Thevenot, Barrouillet, & Fayol, 2001) or si déficit de la mémoire de travail alors chances d'associations sont moindres (Geary, 1993 ; Geary, Brown, & Samaranayake, 1991) → difficulté d'automatisation des procédures

déficit 2aire = consécutif à un dysfonctnt d'une habileté plus générale

Donc… que devient la stratégie de récupération ?

- Dans l'addition et la soustraction :
  - Chez l'adulte expert : procédure incscte de comptage par pas de un par déplacement sur une ligne numérique mentale (coût cognitif ~ 20 ms), lien entre latéralisation de la présentation et opérations (+ ou -)

  - Chez l’enfant : évolution des temps de résolution d’additions simples en fonction de l’expertise = une diminution des temps donc un accroissement de la vitesse de résolution, et pas une modification de distribution de ces temps (Thevenot, Barrouillet, Castel, & Uittenhove, 2016).

⇒ aucun changement radical de stratégies ne s’opère avec la pratique mais les procédures initiales de comptage s’accélèrent au fur et à mesure de l’entraînement et du développement.

- Le cas de la multiplication :

- procédures de comptage non mises en évidence → récupération des résultats en mémoire à long terme.

⇒ les tables de multiplication sont apprises explicitement par cœur à l'école aucune procédure de comptage n'a donc pu être internalisée.

C – La multiplication

- Au départ chez l’enfant :
  - Addition répétée

    « quel est le prix de 3 kg de pommes à 2€? »

    2 + 2 + 2

  MAIS opération multiplicative qd enfant capable de substituer le calcul de « 3 fois 2 » à celui de « 2 fois 3»

- Petit à petit apprentissage des tables de multiplication, exemple de la table de 3 :
  - Soit comme une addition répétée (1 fois 3, 2 fois 3…)
  - Soit comme une table traditionnelle (3 fois 1, 3 fois 2..)

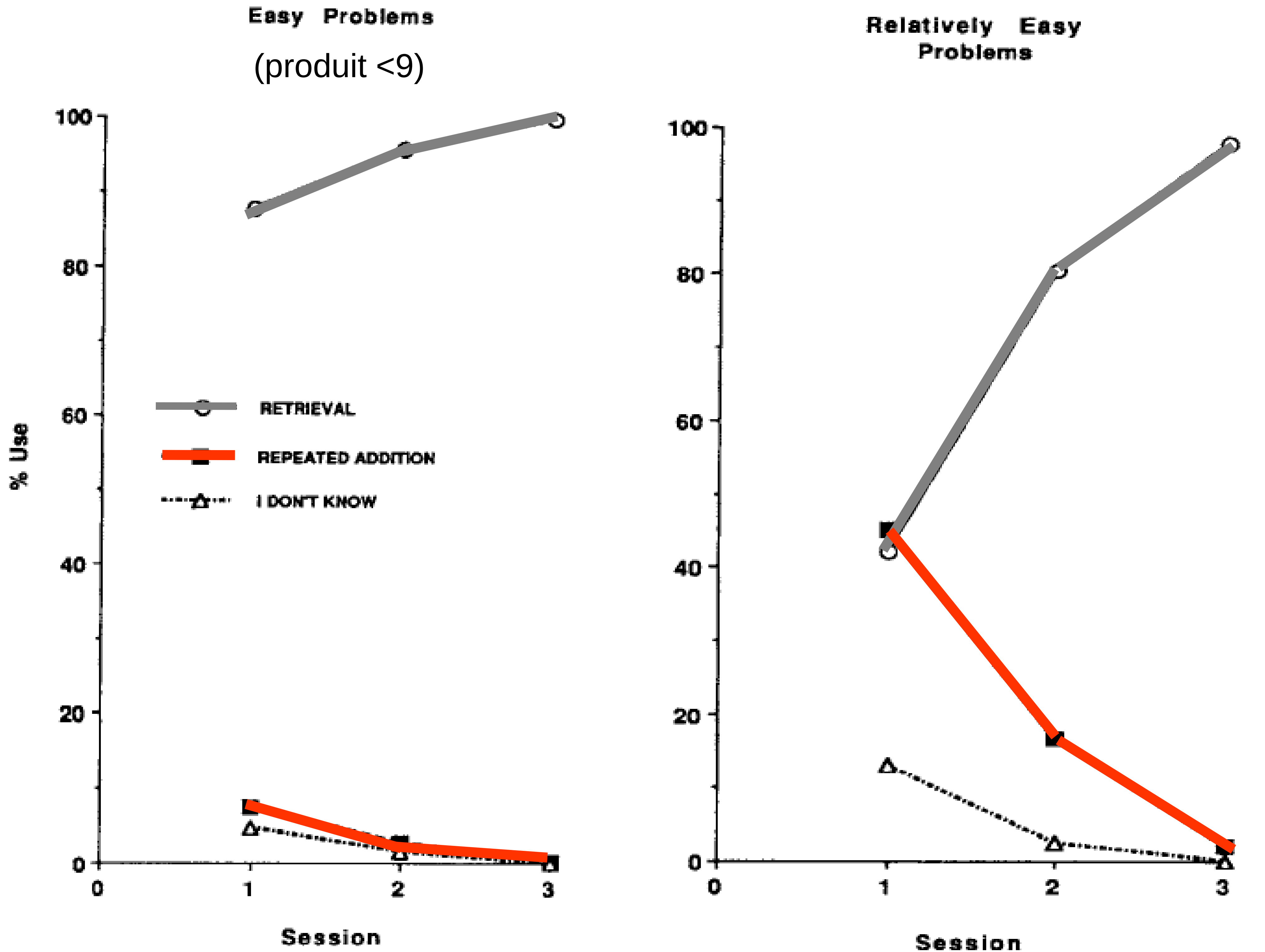
- Brissiaud (1993): l’apprentissage des tables traditionnelles permet plus facilement la mémorisation (accès immédiat à un résultat indépendant du contexte)

  MAIS calcul répété jamais complètement abandonné :

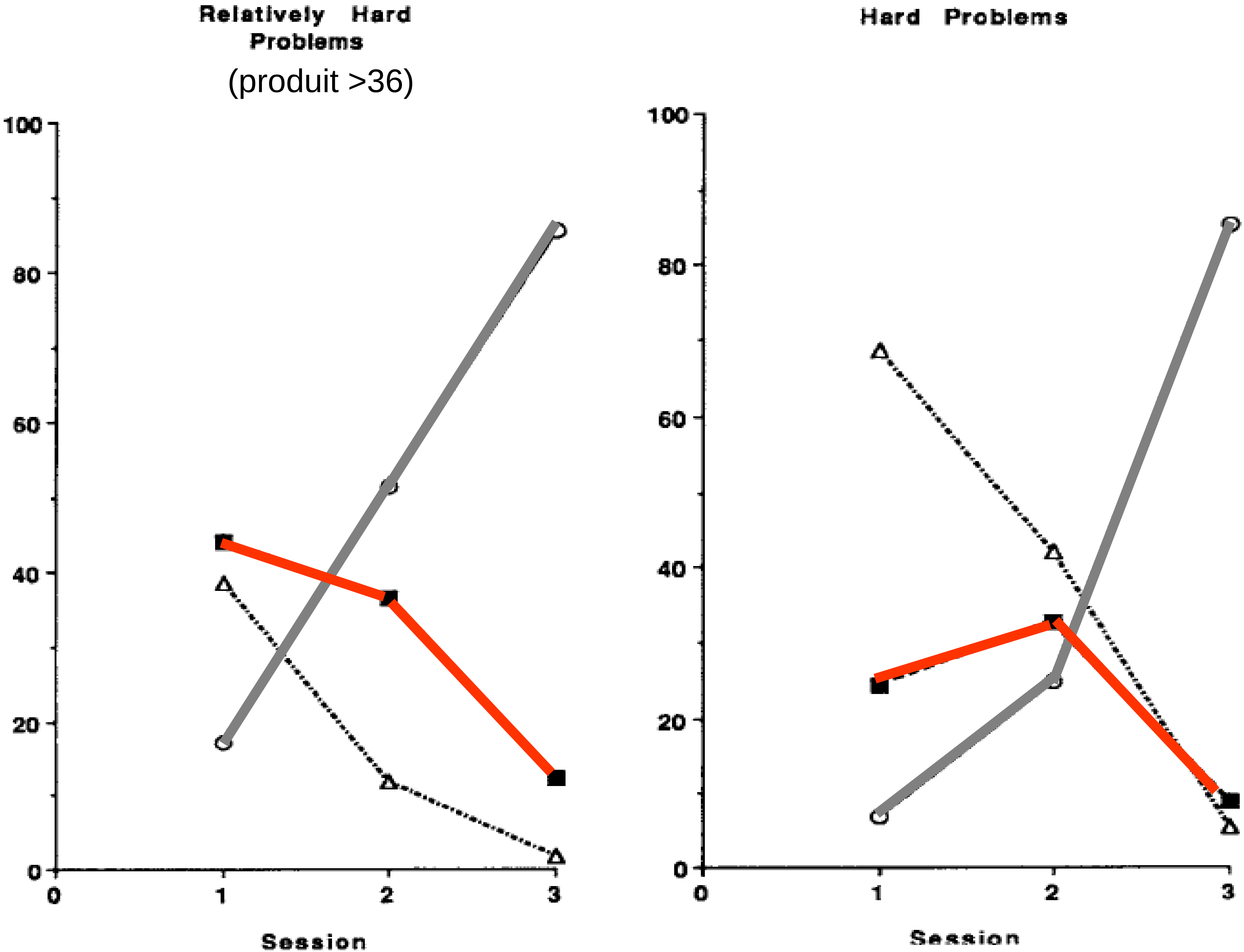
  - Hubbard & al. (1994) : réponses données par des adultes et des enfants ds la résolution des 100 multiplications de base
    - Récupération
    - Décomposition
    - Addition répétée

Evolution du répertoire

- Lemaire & Siegler (1995) :
  - Evaluation du répertoire stratégique d’enfants de CE1 à 3 moments dans l’année (début, milieu, fin)
  - Evaluation de la sélection des différentes stratégies en fonction de la difficulté des problèmes



Easy Problems
(produit <9)
% Use
RETRIEVAL
REPEATED ADDITION
I DON'T KNOW
Session
Relatively Easy Problems
Session


Relatively Hard Problems
(produit >36)
100
80
60
40
20
0
0
1
2
3
Session
Hard Problems
100
80
60
40
20
0
0
1
2
3
Session

- Interprétation : les choix stratégiques sont calibrés en fonction de l’expérience acquise sur chaque type de problème et donc en fonction de l’efficacité de la stratégie de récupération comparativement à d’autres problèmes

Evolution des stratégies en X°

- Siegler (1996) : sensiblement la même que pour l'addition
  - 5 ans : répertoire stratégique varié :
    - Récupération (directe ou après décomposition)
    - Addition répétée
  - Fréquence de la récupération augmente rapidement et celle des autres stratégies diminue : effet de la difficulté des problèmes
  - Vitesse d'exécution diminue durant l'année d'apprentissage

Récupération = source d'erreurs ?

Lemaire & al. (1994) : confusions associatives (interférence entre additions et multiplications) dans des tâches de jugement

3 X 4 = 7		3 + 4 = 12	
Vrai	Faux	Vrai	Faux

Confusion apparaissent d'abord pour les pts problèmes avant de s'étendre aux grandes

➔ Mise en place du réseau associatif des faits multiplicatifs interfère avec celui des faits additifs

Récupération = source d'erreurs ?

Lemaire & al. (1994) : confusions associatives (interférence entre additions et multiplications) dans des tâches de jugement

3 X 4 = 7 — Vrai Faux

3 + 4 = 12 — Vrai Faux

Confusion apparaissent d'abord pour les pts problèmes avant de s'étendre aux grandes

➔ Mise en place du réseau associatif des faits multiplicatifs interfère avec celui des faits additifs

Conclusion sur la résolution des multiplications

- Mise en place d’un réseau de faits multiplicatifs interférant avec le réseau additif

- Mais qu’en est il du développement de la compréhension de la multiplication ?

<u>Piaget (et al., 1983)</u> : la compréhension de la multiplication repose sur des connaissances qui mettent en relation différents concepts (e.g., commutativité, associativité, relations parties/tout)

- Résultats Baroody (1999) avec 36 enfants entre 8 et 9 ans qui ne résolvent pas encore les multiplications simples :

  - Après entraînement : les enfants utilisent diverses stratégies d’évaluation approximative (par exemple : 3 x 8 ~ 20) ou de calcul exact impliquant des connaissances relationnelles ou conceptuelles (e.g., la commutativité)

Le développement de la multiplication ne repose pas seulement sur la récupération en MLT

Comme pour l’addition et la soustraction, l’évolution des stratégies en multiplication n’est pas dissociable de l’acquisition des propriétés sous-jacentes à cette opération.

D – La division

- Peu d'études expérimentales sur l'apprentissage de la division

- Squire et Bryant (2002 a et b, 2003) :

  - Enfants comprennent très tôt le principe de la division sur la base de modèles mentaux élaborés à partir de leur expérience

  <u>ATTENTION</u> : ces modèles mentaux représenteraient une connaissance partielle et cohérente en fonction des buts à atteindre et non la totalité du concept de division

Les enfants se représentent-ils le quotient ?

- RAPPEL :

$$18 : 6 = 3$$

Dividende

Diviseur

Quotient

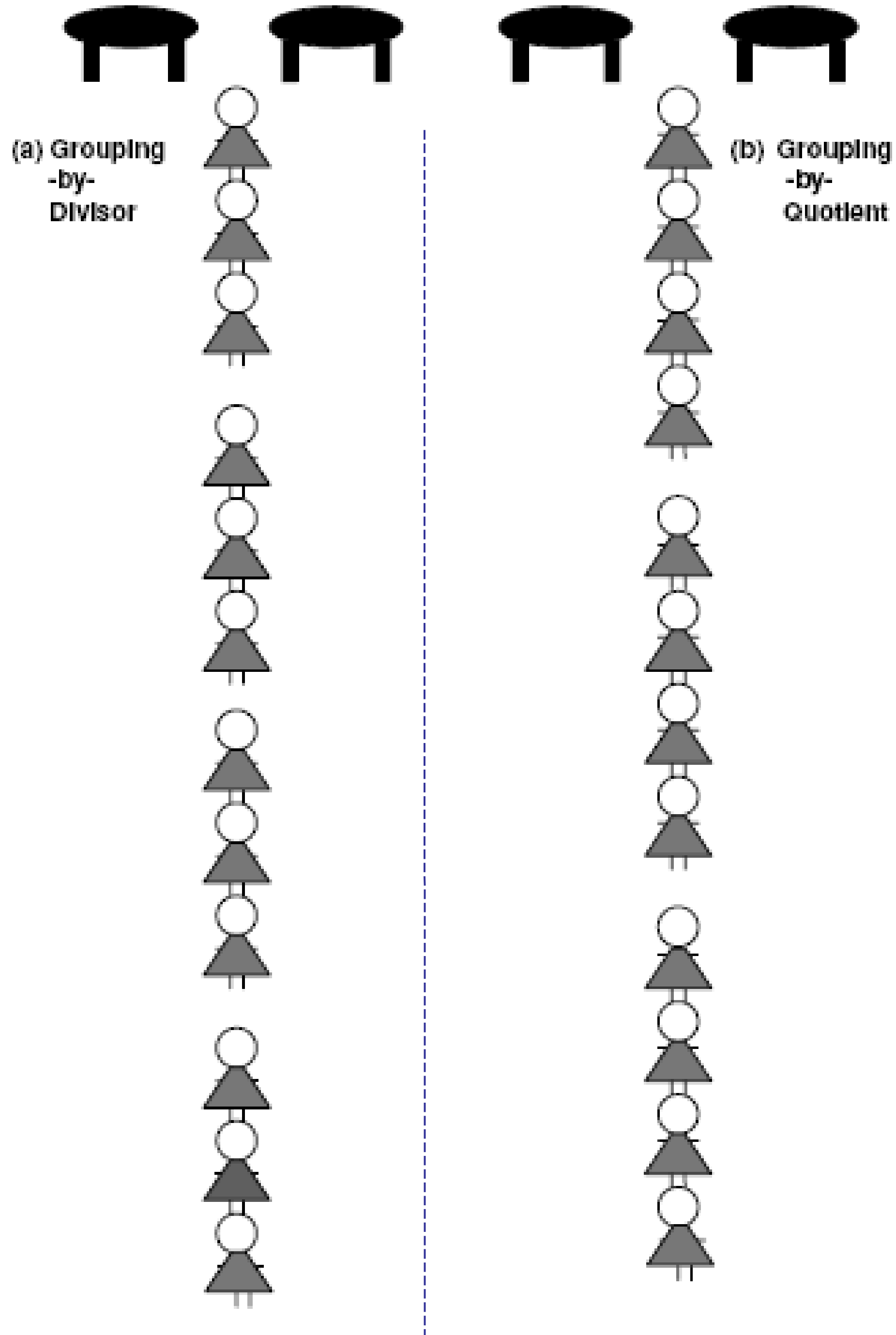
Un effet du type de problème

Partition

Combien d'enfants y aura-t-il à chaque table si tu répartis 12 enfants entre 4 tables ?

Diviseur : 4
= nb de ss-ensemble

Résolution facilitée par le groupement en fonction du diviseur



Quotition

Combien de tables faut-il pour placer 12 enfants avec 3 enfants à chaque table ?

Quotient : 4
= nb d'éléments par ss-ensemble

Résolution facilitée par le groupement en fonction du quotient

Squire & Bryant (2003)

- 125 enfants de 5 à 8 ans
- 2 types de division : par diviseur ou par quotient avec des objets disposés sur une grille
- 3 conditions (dépendantes de la consigne) :
  - Pb de partition
  - Pb de quotition
  - Pb neutres

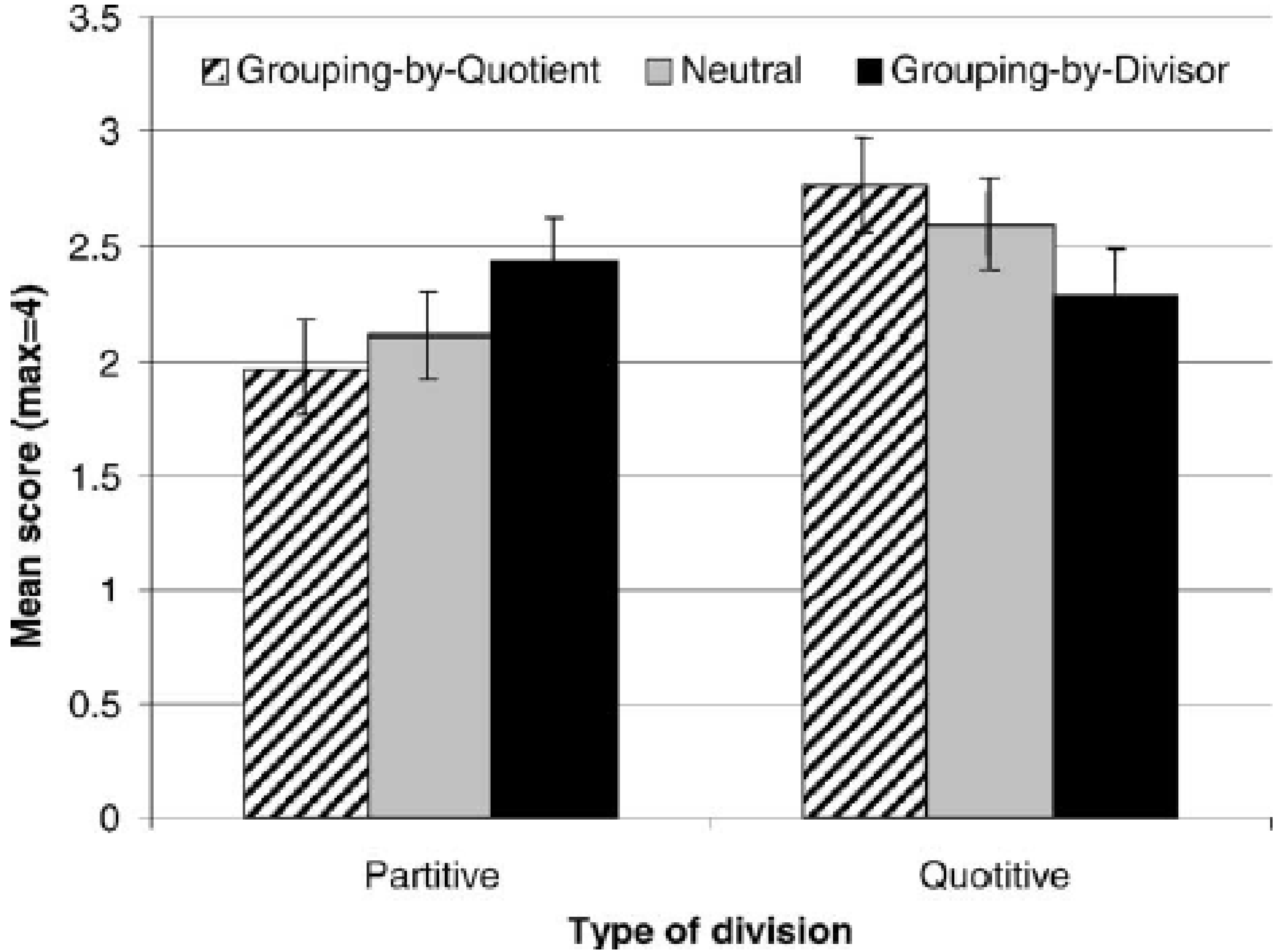


Fig. 5. The mean scores achieved in each condition in each type of division (error bars indicate S.E.M.).

Conclusion

- Un effet de la formulation/présentation du problème
- Évolution importante de la capacité de résolution des divisions avec l’âge

➔ Les jeunes enfants élaborent (avant l’apprentissage de la division) des modèles mentaux de la division

Evolution des procédures de division

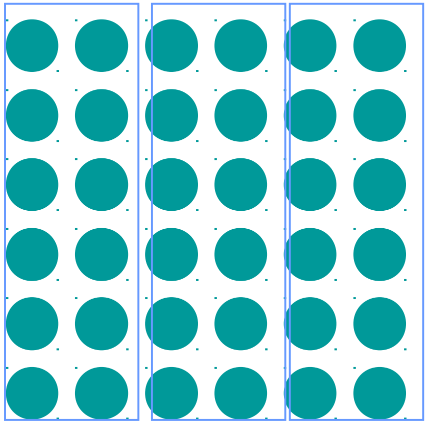
- Gravemeijer (1997) : plusieurs procédures de résolution d’une division (e.g., 36/3) chez des enfants de 8-9 ans qui n’ont appris ni la division ni les multiplications avec des nombres plus grands que 10

Evolution des procédures de division

- Gravemeijer (1997) : plusieurs procédures de résolution d'une division (e.g., 36/3) chez des enfants de 8-9 ans qui n'ont appris ni la division ni les multiplications avec des nombres plus grands que 10

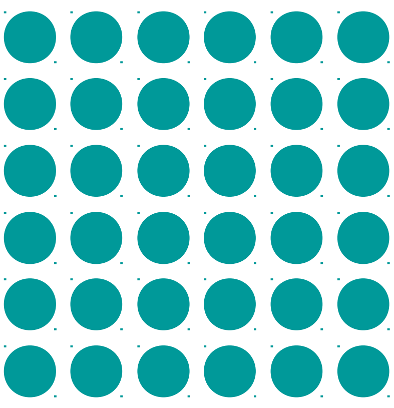
3 enfants divisent 36 bonbons. Combien de bonbons aura chaque enfants ?

- Division sur une base géométrique

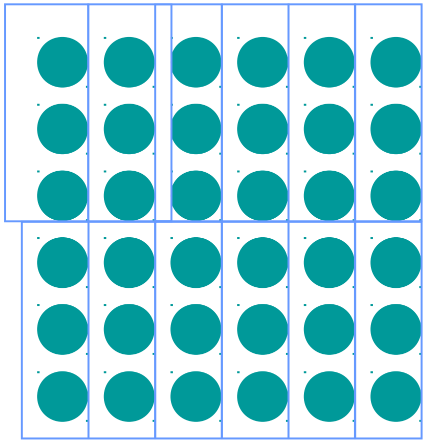


- Distribution un par un :

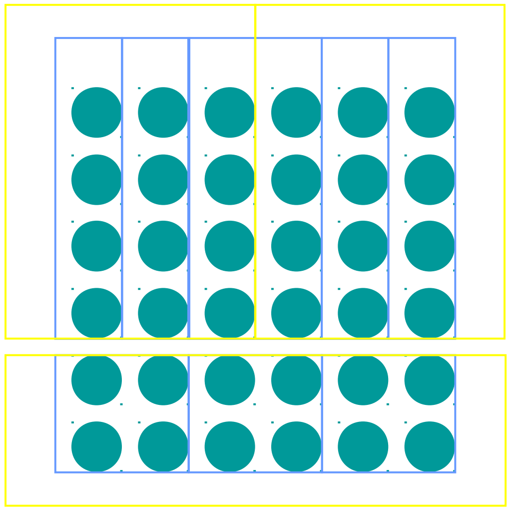
A B C



- Groupement par 3 :



- Utilisation de faits multiplicatifs élémentaires (= récupération de la multiplication 12 = 3 * 4)



- Division d’abord comprise comme une opération de partage d’une quantité en plusieurs sous quantité égale

- Quand division = succession de soustractions, elle peut être comprise comme l’inverse de la multiplication

- Le passage de l’un à l’autre type de division requière la compréhension de la commutativité de la division

Les différentes représentations du nombre et les corrélats neuronaux

Dehaene & Cohen (2000) : Modèle du triple code

- Trois type de représentations mentales explicites et modulaires :
  - R° visuelle arabe (chiffres)
  - R° verbale (séquence de mots)
  - R° analogique
- Ces représentations st directement reliées entre elles par des voies spécifiques de transcodage
- Chaque type de représentation intervient dans un ensemble précis de tâche

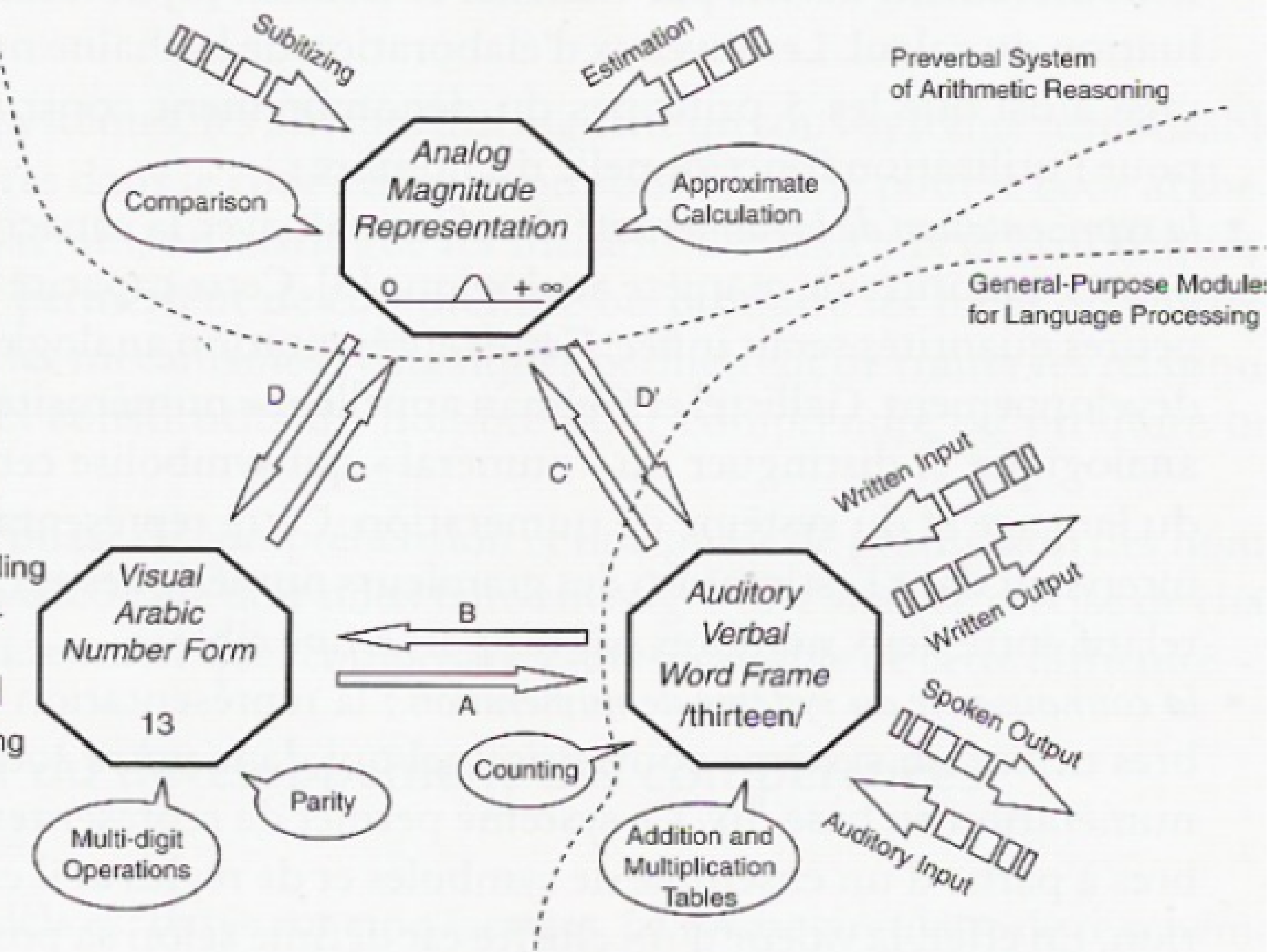
Dehaene & Cohen (2000) : Modèle du triple code

3 grands systèmes de représentation mentale des nombres:

- Le code analogique des quantités numériques
- Le code linguistique
- Le code Indo-Arabe écrit

Différentes procédures de transcodage permettent de passer d'un code à l'autre.

Différentes opérations arithmétiques reposent sur des codes distincts.



Quelle représentation est activée ?

- La représentation activée est spécifique du code d'entrée.
- « Immédiatement après, les nombres peuvent être transcodés dans n'importe quel autre code interne <u>requis pour la tâche en cours</u> » Dehaene & Cohen, 2000, p. 194

Voies de codage internes

- Le modèle postule une voie directe entre codage verbal et arabe qui ne passe pas par une représentation de la quantité → la voie directe arabe-verbale travaille sur des **séquences non interprétées** de symboles.

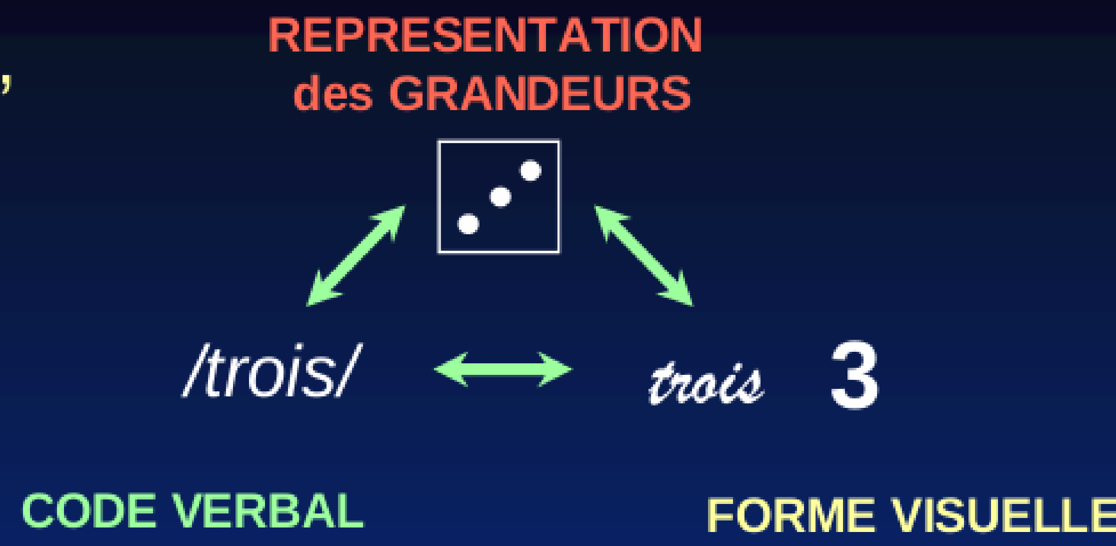
- « Les chemins allant et venant de la représentation des quantités sont dénués de règles syntaxiques » : étiquetage directe des quantités.

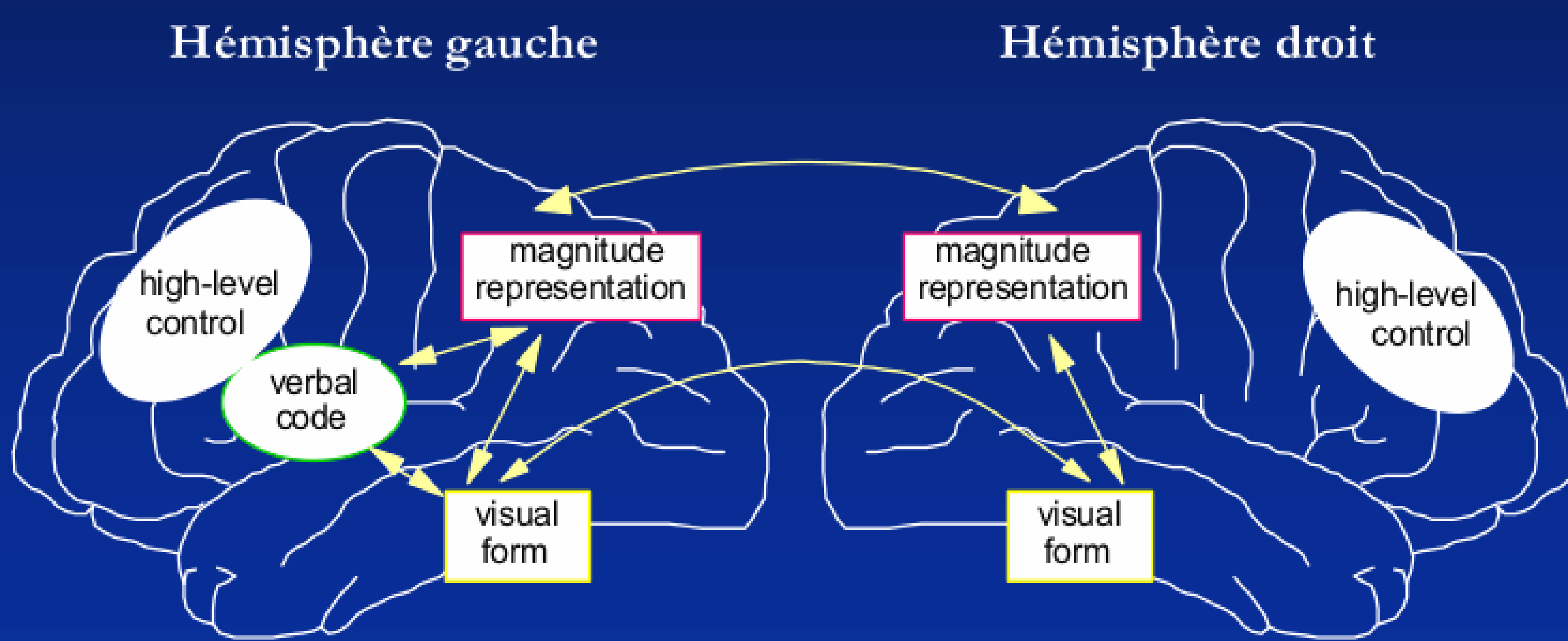
Triple code

Représentations	Tâches
Verbale	Traitt des noms de nbre Comptage Faits additifs simples Tables de multiplication
Visuelle	Traitt des nombres arabes Jugement de parité Calcul mental à plusieurs chiffres
Analogique	Traitt des quantités analogiques Comparaison numérique Calcul approximatif

Le modèle du “triple code”

(Dehaene & Cohen, 1995)

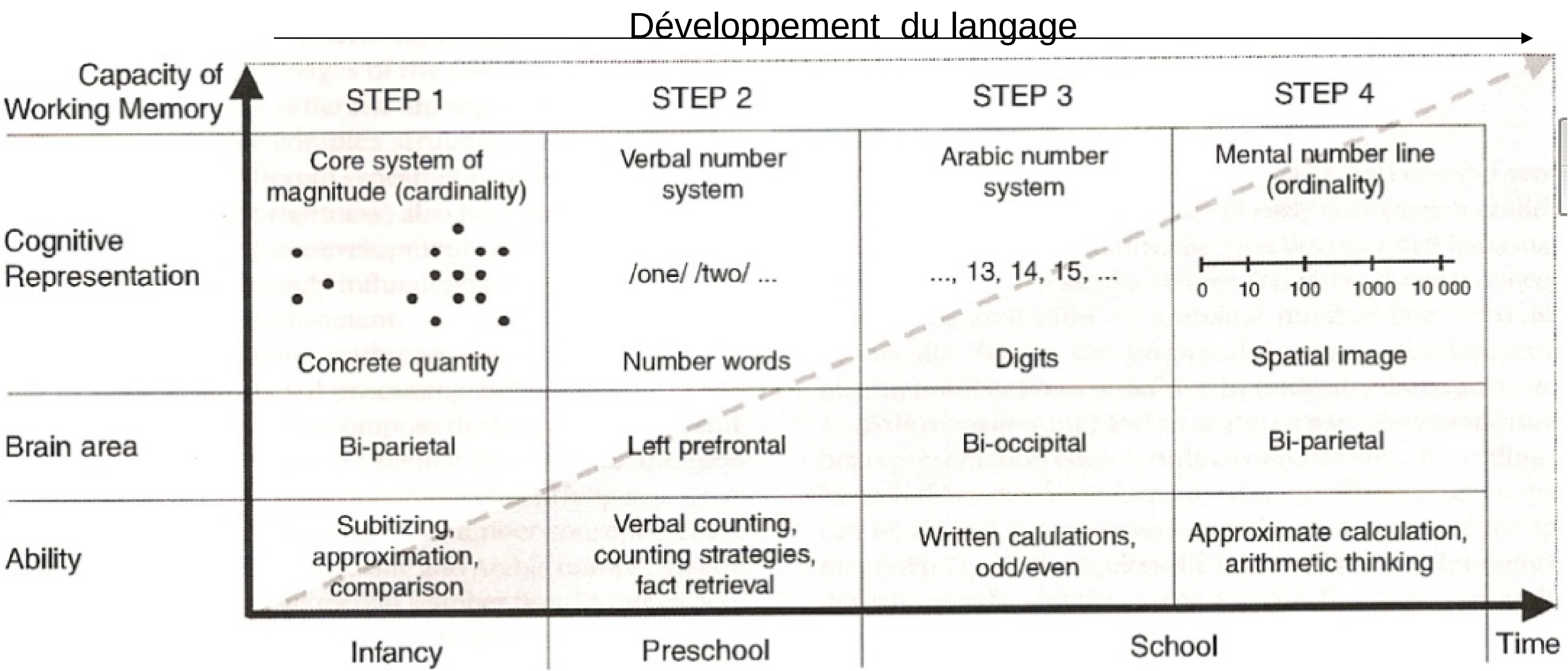




Dehaene, S. (1992). *Cognition, 44*, 1-42.
Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). *Mathematical Cognition, 1*, 83-120.

Un modèle développemental de l'acquisition du nombre

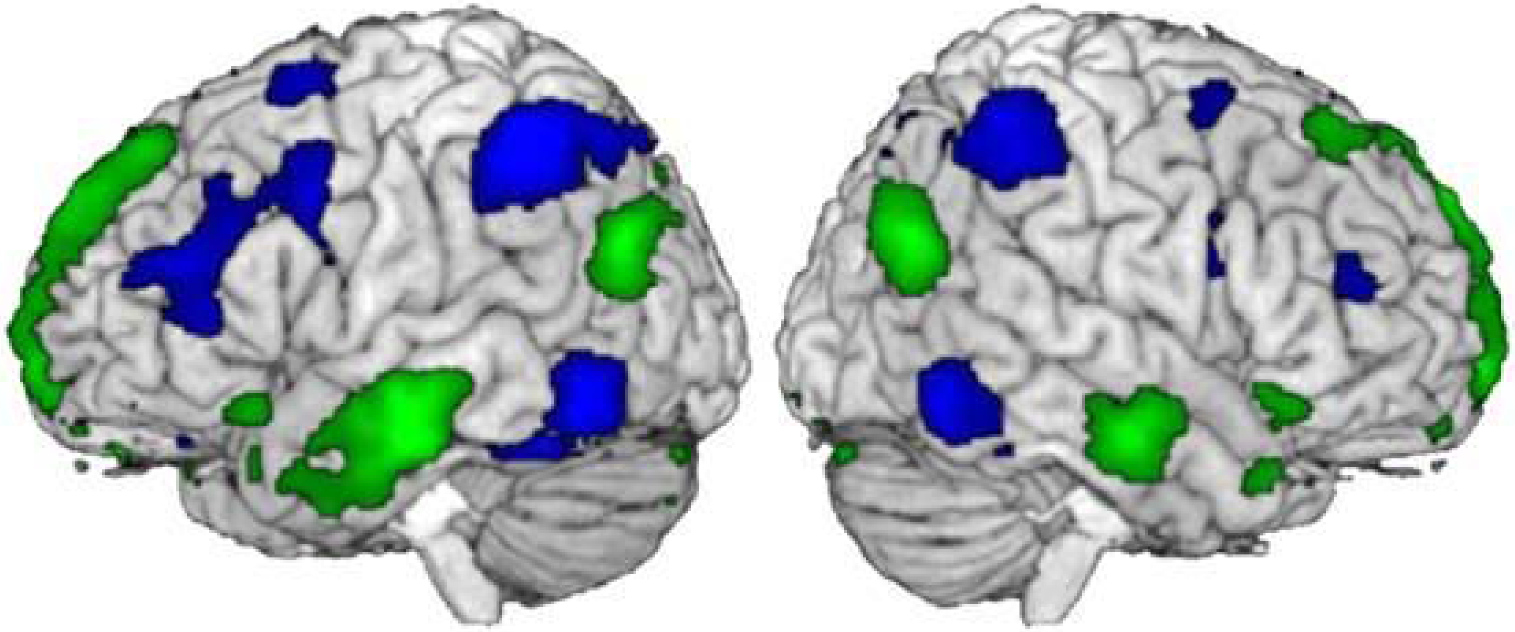
Un modèle du développement numérique : Von Aster et Shalev (2007)



Limite : absence d'interactions entre les différentes représentations

Mathématique et langage

Peut-il y avoir une pensée sans langage ?



Comparaison des régions du cerveau activités par une activité mathématique et par une activité langagière chez les mathématiciens et les non-mathématiciens. Une activité mathématique active les régions du cerveau représentées en bleu chez les mathématiciens tandis qu'une activité langagière active les régions représentées en vert sur cette figure chez des mathématiciens et des non mathématiciens. Ces régions ne se recouvrent pas. © M.Amalric/CEA – Amalric & Dehaene (2016)

Histoire à suivre...